ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

MATEMÁTICA
APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS

EDUCACIÓN SECUNDARIA DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

DOCUMENTO DE TRABAJO

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN DE ADULTOS

"2022 AÑO DE LA REVOLUCIÓN CULTURAL PARA LA DESPATRIARCALIZACIÓN: POR UNA VIDA LIBRE DE VIOLENCIA CONTRA LAS MUJERES"

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO NIVEL APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS
MATEMÁTICA (5TO Y 6TO SEC.)
EDUCACIÓN DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Sandra Cristina Cruz Nina
VICEMINISTRA DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Fernando Reynaldo Yujra Quispe
DIRECTOR GENERAL DE EDUCACIÓN DE ADULTOS

EDICIÓN
Viceministerio de Educación Alternativa y Especial
Dirección General de Educación de Adultos

Depósito Legal:
4-1-8-2022 P.O.

Impresión:
EDITORIAL DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Av. Arce, Nro. 2147
www.minedu.gob.bo

La Paz - Bolivia
2022

PRESENTACIÓN

Con el propósito de consolidar el derecho a la educación con calidad en los aprendizajes, el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, a través del Viceministerio de Educación Alternativa y Especial y la Dirección General de Educación de Adultos, inicia ésta segunda fase proporcionando recursos educativos para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas para la presente gestión.

Es importante considerar que las Personas Jóvenes y Adultas participan activamente de los cambios en la sociedad y para ello, la Educación Alternativa les brinda oportunidades de formación y capacitación que les permita tener mejores posibilidades de acceso al conocimiento en diversos campos de saberes, una formación permanente, continua y desarrollo igualitario, participativo e incluyente en el marco filosófico del Vivir Bien.

Los materiales educativos que se ponen a consideración, tienen un enfoque inclusivo, buscan responder a la diversidad de características de las y los estudiantes/participantes; se encuentran elaborados según las orientaciones del currículo, es decir, la formación integral de acuerdo a las dimensiones del ser, saber, hacer y decidir, los objetivos holísticos, los momentos metodológicos y la evaluación; además, toma en cuenta los diferentes contextos y modalidades de atención del Sistema Educativo Plurinacional, enmarcados en el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo constituido en la Ley de la Educación N° 070 "Avelino Siñani – Elizardo Pérez".

Estimados estudiantes/participantes, comunidad en general, les invitamos a ser parte de la Educación Alternativa y a continuar con su formación personal y comunitaria que nos permitirá avanzar juntos en el "2022 año de la revolución cultural para la despatriarcalización: por una vida libre de violencia contra las mujeres".

Edgar Pary Chambi

Ministro de Educación

ÍNDICE

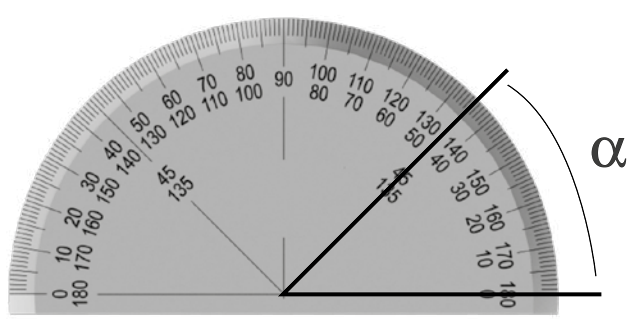
El presente, constituye un material educativo que coadyuvará en los procesos educativos de estudiantes/participantes del ámbito de la Educación Alternativa, orientados hacia el desarrollo de las potencialidades de la comunidad, a partir de las experiencias, recuperando los saberes y conocimientos de nuestro contexto.

Ofrece una serie de contenidos que han sido seleccionados para despertar el gusto por el aprendizaje y la participación, tomando en cuenta las orientaciones metodológicas que nos guiarán en el proceso.

MÓDULO I
TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

OBJETIVO HOLÍSTICO

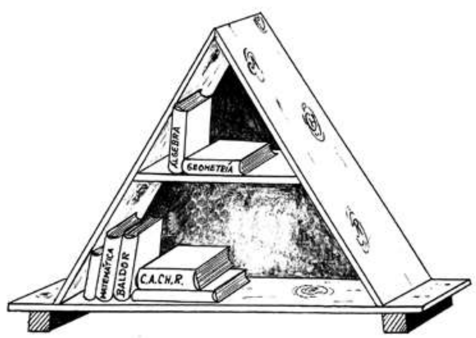
Fortalecemos nuestros conocimientos matemáticos tradicionales y ancestrales, promoviendo valores socio-comunitarios, a través de la aplicación de operaciones trigonométricas en la vida cotidiana transformando nuestra práctica educativa.

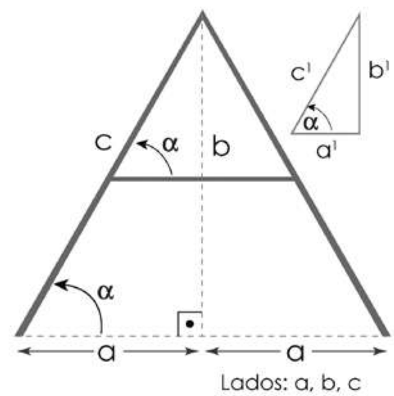


UNIDAD 1
INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

1. PRÁCTICA

Los hermanos Abel y Ana decidieron elaborar un estante con los materiales que hay en su contexto, con tablones decidieron construirlo en forma de "A" ya que de los dos hermanos sus nombres empezaban con esa letra.



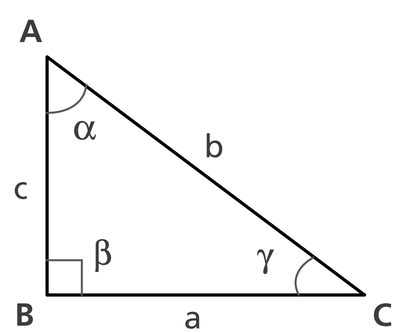


¿De qué manera podemos utilizar las propiedades de la geometría para ayudar en nuestro diario vivir? ¿En tu contexto como se utiliza la geometría para cubrir necesidades y problemáticas? ¿Cómo ayuda la geometría en poder elaborar materiales útiles que respondan a tu necesidad? ¿Cómo impulsamos espacios recreativos que desarrollen en su realidad?

2. TEORÍA

Triángulo. Es una figura plana que tiene tres lados, tres ángulos y tres vértices:

Lados: a, b, c
Ángulos: α, β, γ
Vértices: A, B, C



Responde las siguientes preguntas:

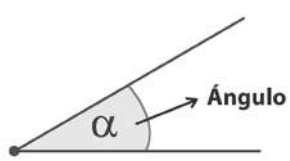
1. Dibujamos en nuestros cuadernos, tres lugares donde viste la figura de un triángulo y coméntalo.
2. ¿Hiciste alguna vez una manualidad aplicando triángulos? Menciónalo:

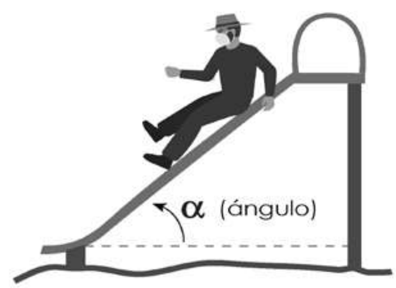
R ....

....

La Trigonometría. Es una parte de la matemática que estudia las medidas de los triángulos, sus lados y ángulos.

Ángulo		Ejemplo



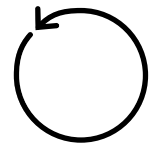
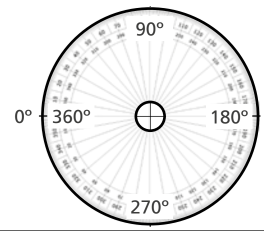
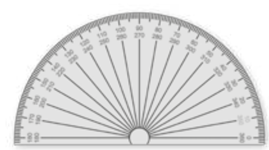


Medida de ángulos

Existen dos sistemas que son los más usados para medir ángulos: GRADOS SEXAGESIMALES (º) y RADIANES (rad). Cómo se mide un ángulo.

Hermana, ¿Cómo podemos medir los ángulos?

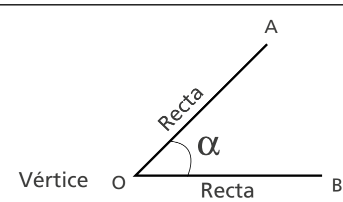
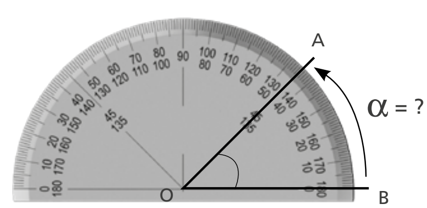
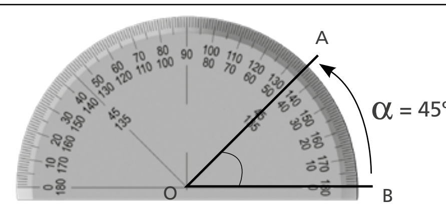
Los ángulos se miden en grados sexagesimales, se escribe 45° y se lee 45 grados

Los ángulos se miden de forma circular.	
Se mide en sentido contrario a las agujas del reloj.	
La circunferencia se reparte en 360 partes y a eso se le llama grados sexagesimales, 360°.	
Para medir los ángulos utilizamos el transportador.	

Ahora aprenderemos a medir ángulos:

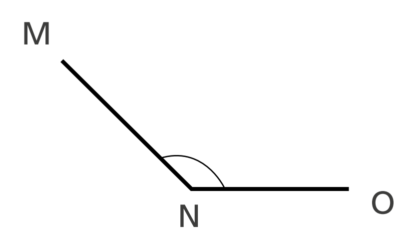
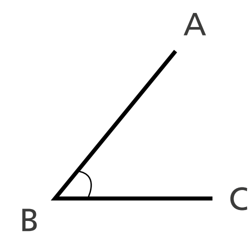
Ejemplo:

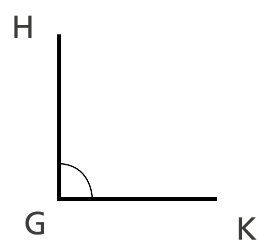
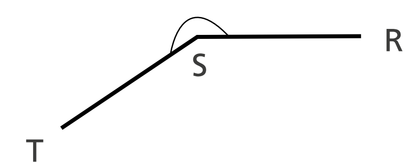
¿Cuánto mide el ángulo?

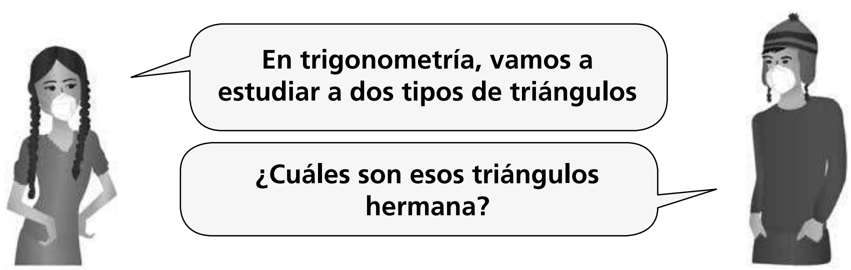
Tenemos la figura.	
Ponemos el transportador encima de la figura. El punto medio del transportador, debe estar en el mismo punto donde se juntan las dos rectas (en el vértice). El grado cero del transportador debe igualar con la recta horizontal	
Ahora desde el cero (0), empezamos a contar hasta llegar a la otra recta y sabremos cuánto mide el ángulo.	
Entonces, el ángulo A O B = 45° grados.	

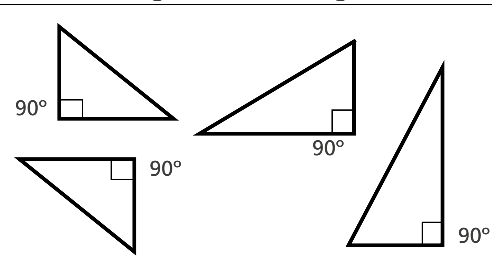
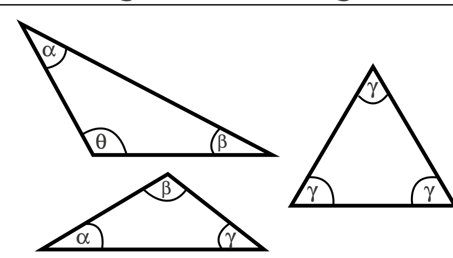
Actividad

Ahora buscarás un transportador, medirás estos ángulos y lo anotarás.

	
Respuesta:	Respuesta:

	
Respuesta:	Respuesta:



Triángulos rectángulos	Triángulos oblicuángulos
	
Uno de sus ángulos es recto, es decir, es de 90°grados.	Todos sus ángulos son distintos mayores y menores a 90°.

Sistema sexagesimal

Es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360° partes iguales.

1°(grado) = 60′ (minutos) = 3600″ (segundos)

1′ (minuto) = 60″ (segundos)

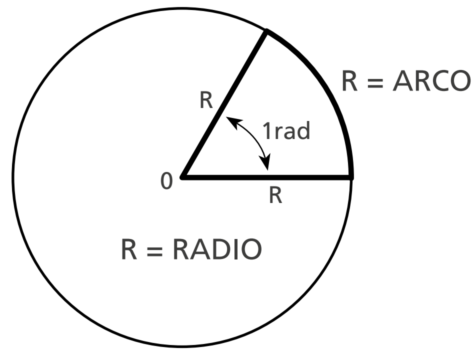
Se escribe (°) se lee grado.
Se escribe (′) se lee minutos.
Se escribe (″) se lee segundos.

Sistema radián

Radián (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.

1 rad= 57° 17′ 44.8″

360° = 2π rad



Operaciones en el sistema sexagesimal

Adición de medidas angulares

Seguir los siguientes pasos:

1)	Para sumar ángulos: se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos y se suman.	32° 24′ 48″ + 43° 49′ 25″ 75° 73′ 73″
2)	Si los segundos suman más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se suma a los minutos.	73″ | 60 - 60″ 1′ 13″ 75° 73′ 73″ + 1′
3)	Escribamos los grados, minutos y segundos.	75° 74′ 13″
4)	Si los minutos suman más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los minutos y el cociente se suma a los grados.	74′ | 60 14′ 1° 75° 14′ 13″ + 1°
5)	Escribamos los grados, minutos y segundos.	Respuesta final 76° 14′ 13″

Resolvemos el siguiente ejercicio:

1)	Para sumar ángulos: se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos y se suman.	$\begin{array}{rrrr} & 42^\circ & 44' & 28'' \\ + & 33^\circ & 29' & 45'' \\ \hline \end{array}$
2)	Si los segundos suman más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se suma a los minutos.	
3)	Reescribamos los grados, minutos y segundos.	
4)	Si los minutos suman más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los minutos y el cociente se suma a los grados.	
5)	Escribamos los grados, minutos y segundos.	

Sustracción de medidas angulares

Pasos a seguir:

1)	Para restar ángulos; se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.	$\begin{array}{rrrr} & 52^\circ & 23' & 78'' \\ - & 43^\circ & 49' & 25'' \\ \hline \end{array}$
2)	Se restan los segundos. Prestamos 1° de 52° para que la resta se pueda realizar: $1^\circ = 60' \longrightarrow 60' + 23 = 83'$	$\begin{array}{rrrr} & 52^\circ & \overset{1^\circ}{23'} & 78'' \\ - & 43^\circ & 49' & 25'' \\ \hline & & & 53'' \end{array}$
3)	Hacemos lo mismo con los minutos y grados. Ahora si se puede hacer la resta.	$\begin{array}{rrrr} & 51^\circ & 83' & 78'' \\ - & 43^\circ & 49' & 25'' \\ \hline & 08^\circ & 34' & 53'' \end{array}$

Resolvemos el siguiente ejercicio:

1)	Para restar ángulos; se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.	Restar el siguiente ejercicio: 72° 23′ 87″ - 23° 39′ 25″
2)	Se restan los segundos.	
3)	Hacemos lo mismo con los minutos y grados.	

Multiplicación de un ángulo por una constante o número

Multiplicar 32°,23°,49° por 5

1)	Multiplicamos los segundos, minutos y grados por el número.	32° 23′ 49″ * 5 160° 115′ 245″
2)	Si los segundos sobrepasan los 60 se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se sumará a los minutos.	245″ | 60 5″ 4′
3)	Se suma el cociente con los minutos.	115′ + 4′ = 119′
4)	Escribimos el resultado obtenido hasta el momento.	160° 119′ 5″
5)	Si los minutos sobrepasan más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los minutos y el cociente se suma a los grados:	119″ | 60 59′ 1°
6)	Sumando el cociente con los grados.	160° + 1° = 161°
7)	Escribamos el resultado final.	161° 59′ 5″

Resolvemos el siguiente ejercicio:

1)	Multiplicamos los segundos, minutos y grados por el número.	23° 45′ 39″ * 8
2)	Si los segundos sobrepasan los 60 se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se sumará a los minutos.	
3)	Se suma el cociente con los minutos.	
4)	Escribimos el resultado obtenido hasta el momento.	
5)	Si los minutos sobrepasan más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los minutos y el cociente se suma a los grados:	
6)	Sumando el cociente con los grados.	
7)	Escribamos el resultado final.	

División de un ángulo por una constante o número

Ejemplo: Dividir 37° 48′ 25″ entre 5

Pasos a seguir:

1)	Se dividen los grados entre el número.	37° | 5 2° 7°
2)	El cociente son los grados y el resto multiplica por 60 son los minutos.	37° | 5 2° 7°
3)	Multiplicando.	2 * 60′ = 120′
4)	Se añaden estos minutos a los que tenemos	48′+120′=168′
5)	Repetimos el mismo proceso de división con los minutos.	168″ | 5 18′ 33′ 3′
6)	Multiplicando.	3 * 60″ = 180″
7)	Se añaden estos segundos a los que tenemos.	25″+180″=205″

8)	Dividimos el resultado obtenido.	205" | 5 5" 41' 0"
9)	Por último, se escribe todos los cocientes.	Respuesta final 7° 33' 41"

Resolver la siguiente división

Dividir 47° 38' 24" entre 6

1)	Se dividen los grados entre el número.	47" | 6
2)	El cociente son los grados y el resto multiplica por 60 son los minutos.	
3)	Multiplicando.	
4)	Se añaden estos minutos a los que tenemos	
5)	Repetimos el mismo proceso de división con los minutos.	
6)	Multiplicando.	
7)	Se añaden estos segundos a los que tenemos.	
8)	Dividimos el resultado obtenido	
9)	Por último, se escribe todos los cocientes	

Conversión de grados a radianes

El número **pi**, también conocido como π en las matemáticas es un número irracional. Esto quiere decir que no es exacto ni periódico, ya que tiene una cantidad infinita de decimales.

Para realizar la conversión de grados a radianes, se debe multiplicar por:

$$\text{Radianes} = \text{Ángulo } (^\circ) * \frac{\pi}{180^\circ}$$

Ejemplo:

a)	Convertir 50º grados sexagesimales a radianes.	$50^\circ * \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{50\pi}{180} = 0,87$ radianes
b)	Convertir 80º grados sexagesimales a radianes.	$80^\circ * \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{80\pi}{180} = 1,40$ radianes
c)	Convertir 65º grados sexagesimales a radianes.	
d)	Convertir 75º grados sexagesimales a radianes.	

Conversión de radianes a grados

Para realizar la conversión de radianes a grados, se debe multiplicar por:

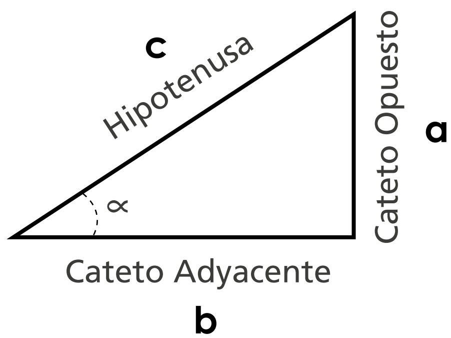
$$S^\circ = \text{Ángulo radianes} * \frac{180^\circ}{\pi}$$

Ejemplo:

a)	Convertir $\frac{2}{3}\pi$ radianes a grados sexagesimales.	$\frac{2}{3}\pi * \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360}{3} = 120^\circ$
b)	Convertir $\frac{7}{12}\pi$ radianes a grados sexagesimales.	$\frac{7}{12}\pi * \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1260}{12} = 105^\circ$
c)	Convertir $\frac{5}{8}\pi$ radianes a grados sexagesimales.	
d)	Convertir $\frac{3}{5}\pi$ radianes a grados sexagesimales.	

Triángulos rectángulos

Funciones trigonométricas



$$\text{sen} \propto = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos \propto = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tg} \propto = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

En un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo $\propto$ se definen, los siguientes:

- El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Teorema de pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

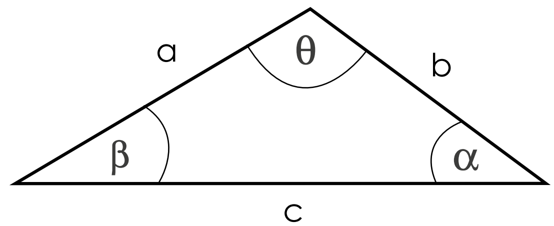
Para obtener las seis razones trigonométricas, en base a las anteriores tres funciones, se intercambian el numerador y denominador, obteniendo la siguiente:

Función principal	Función recíproca
$\text{sen} \propto = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\text{cosec} \propto = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$
$\cos \propto = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\sec \propto = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}$
$\text{tg} \propto = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$	$\text{cotan} \propto = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}$

Triángulos oblicuángulos

1. Ley de senos

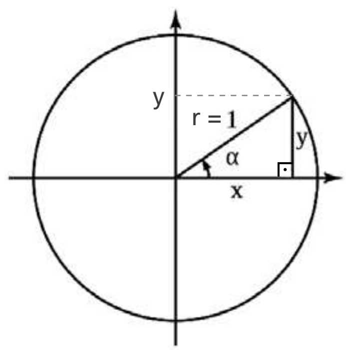
$$\frac{\text{Sen } \alpha}{a} = \frac{\text{Sen } \beta}{b} = \frac{\text{Sen } \theta}{c}$$



2. Ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos \theta$$

Círculo trigonométrico. Es la circunferencia cuyo centro es el origen del sistema de ejes cartesianos o de coordenadas rectangulares y su radio mide la unidad.

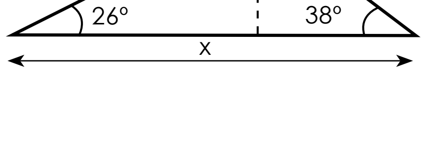


Si (x, y) es un punto de la circunferencia unidad del primer cuadrante, entonces x e y son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud 1 Aplicando el "Teorema de Pitágoras", a y b.

Satisfacen la ecuación: $r^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 1 = radio = hipotenusa$

1. Calcular la base (lado x) del siguiente triángulo escaleno:



2. Desde un supermercado se observa el ático de un rascacielos de 527 metros de altura bajo un ángulo de 42°. Calcular la distancia que hay desde el supermercado hasta la puerta del rascacielos.

3. Ramiro está volando su cometa y le gustaría saber qué altura alcanza. La sombra de la sombra de la cometa comienza a sus pies y termina a 6.7 metros y el ángulo que forma el cable con el suelo es de 39°. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

3. VALORACIÓN

1. ¿Valoramos los sistemas de medidas y funciones trigonométricas en nuestra realidad?

   ....

   ....

2. ¿De qué manera se visibiliza la utilidad de la trigonometría en situaciones concretas de nuestra vida?, menciona 5 ejemplos.

   ....

   ....

3. ¿Cómo aplicamos los ángulos en nuestro diario vivir?, menciona algunos ejemplos:

   ....

   ....

4. PRODUCCIÓN

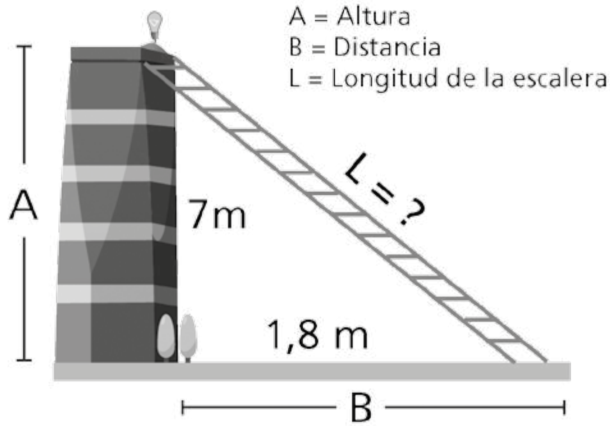
1. En nuestro hogar visibilizamos una necesidad donde utilices los criterios de conversión y ángulos para poder elaborar un material que responda a la necesidad identificada.

2. Desarrollamos en nuestros cuadernos un esquema o modelo procedimental para acelerar las conversiones en función de la utilidad identificada.

UNIDAD 2
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1. PRÁCTICA

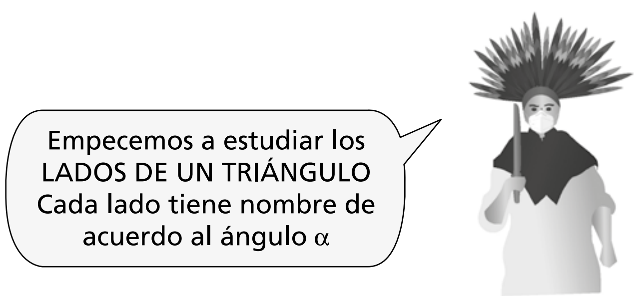
Juana y Pedro tienen la necesidad de cambiar la resistencia de la lámpara que alumbra el patio de la institución, pero no saben qué longitud debe tener la escalera para que apoyada a 1,80 metros de distancia de la pared alcance a la lámpara, sabiendo que se encuentra a 7 metros de altura.

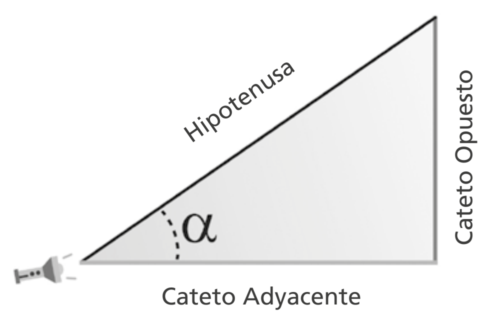


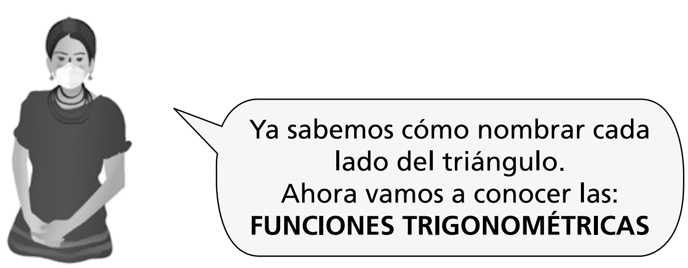
¿Qué utilidad tiene el saber adecuar el Teorema de Pitágoras a situaciones reales?, ¿Por qué es necesario conocer despeje de variables?, ¿Cómo esto ayuda a responder y calcular medidas que requieres al momento de pretender responder un problema o necesidad?

2. TEORÍA

De esta manera nos adentramos a conocer la trigonometría para poder utilizarlo en el cálculo de alturas, por ejemplo:





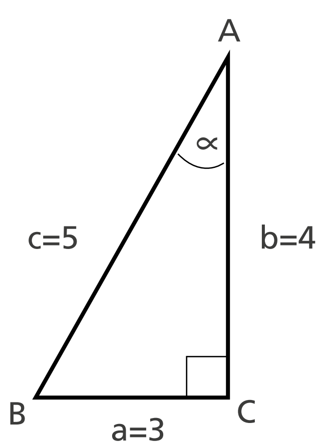


Funciones trigonométricas	Funciones trigonométricas recíprocas
Seno $\propto = \dfrac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} \Rightarrow \text{Sen} \propto = \dfrac{a}{c}$	Cosecante $\propto = \dfrac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}} \Rightarrow \text{Csc} \propto = \dfrac{c}{a}$
Coseno $\propto = \dfrac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} \Rightarrow \text{Cos} \propto = \dfrac{b}{c}$	Secante $\propto = \dfrac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}} \Rightarrow \text{Sec} \propto = \dfrac{c}{b}$
Tangente $\propto = \dfrac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}} \Rightarrow \text{Tg} \propto = \dfrac{a}{b}$	Cotangente $\propto = \dfrac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}} \Rightarrow \text{Ctg} \propto = \dfrac{b}{a}$

Importante:

Estas funciones trigonométricas son muy importantes para poder continuar nuestro aprendizaje.

1) Tenemos los datos:



Conocemos muy bien las funciones trigonométricas:

$$\text{Seno} \propto = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\text{Coseno} \propto = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\text{Tangente} \propto = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}}$$

Ahora reemplazamos con las letras de cada lado:

$$\text{Sen } \propto = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos } \propto = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tg } \propto = \frac{a}{b}$$

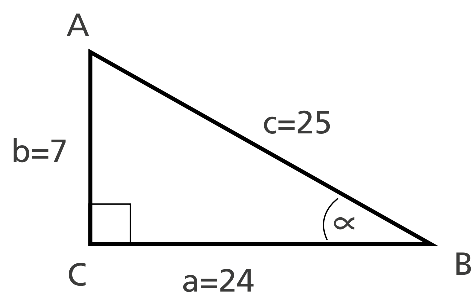
Y para terminar reemplazamos con el valor numérico de cada lado:

$$\text{Sen } \propto = \frac{3}{5}$$

$$\text{Cos } \propto = \frac{4}{5}$$

$$\text{Tg } \propto = \frac{3}{4}$$

2) Tenemos los datos:



Conocemos muy bien las funciones trigonométricas:

$$\text{Seno } \propto = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\text{Coseno } \propto = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\text{Tangente } \propto = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}}$$

Ahora reemplazamos con las letras de cada lado:

Sen $\propto$ = —

Cos $\propto$ = —

Tg $\propto$ = —

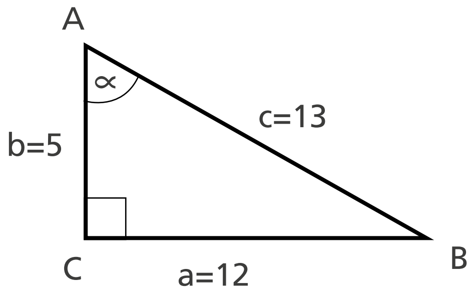
y para terminar reemplazamos con los valores numéricos de cada lado:

Sen $\propto$ = —

Cos $\propto$ = —

Tg $\propto$ = —

3) Tenemos los datos



Conocemos muy bien las funciones trigonométricas:

Seno $\propto$ = ____________

Coseno $\propto$ = ____________

Tangente $\propto$ = ____________

Realicemos las siguiente actividad:

En nuestro diario vivir, hemos estado utilizando los ángulos muchas veces, pero no nos dábamos cuenta. Ahí tenemos que entender que la matemática siempre está en nuestro entorno y que necesitamos comprenderla.

¿En qué actividades has utilizado los triángulos o los ángulos? Escribe en la siguiente lista:

1.	2.
3.	4.
5.	6.

Resolución de triángulos

Antes de empezar a estudiar el teorema de Pitágoras, vamos a responder a algunas preguntas:

1. ¿Qué sabes de Pitágoras de Samo?

R ....

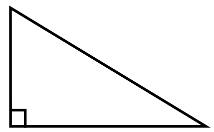
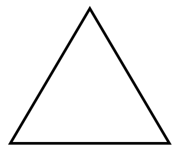
2. ¿Qué es la hipotenusa?

R ....

3. ¿Qué son los catetos?

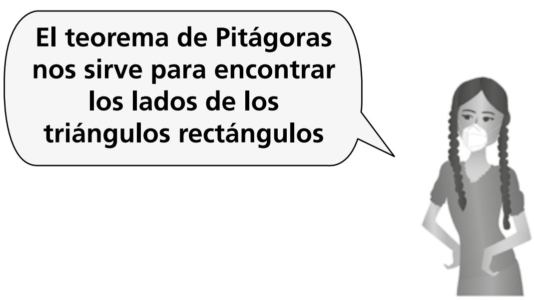
R ....

Anote el nombre correcto de los siguientes triángulos:

Un ángulo es 90º.		
Todos los lados son iguales.		

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

El teorema de Pitágoras solo es aplicable en los triángulos rectángulos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Esto quiere decir que: el área del lado “c” tiene que ser igual al área de los lados “a” y “b”.

Para encontrar el lado “c”	Para encontrar el lado “a”	Para encontrar el lado “b”
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

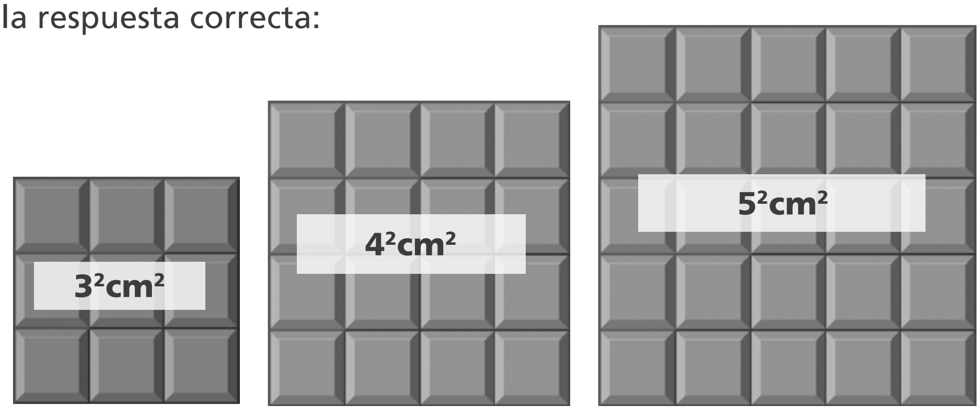
Explicación del teorema

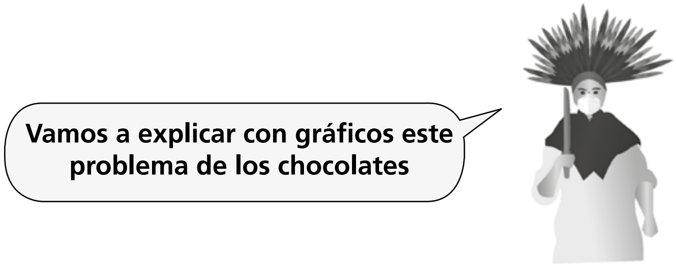
Luciano y Luciana, van a la tienda a comprar chocolates, Luciano compra solo un chocolate de $(5\ cm)^2$, en cambio Luciana compra dos chocolates de $(3\ cm)^2$ y $(4\ cm)^2$.

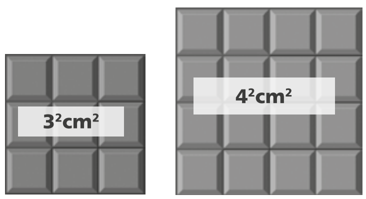
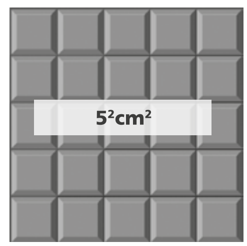
¿Quién tiene más chocolate?

Encierra en un círculo la respuesta correcta:

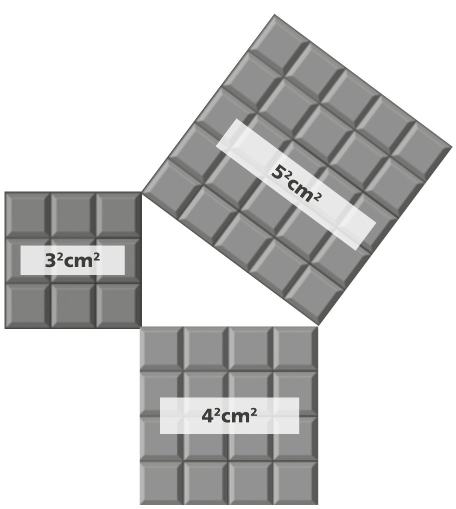
- Luciana
- Luciano
- Iguales





Luciana	**Luciano**
Tiene dos chocolates de $(3\ cm)^2$ y $(4\ cm)^2$.	Tiene un chocolate de $(5cm)^2$.
	
¿Cuántos cuadrados de chocolate tiene en total Luciana?	¿Cuántos cuadrados de chocolate tiene en total Luciano?
______cuadrados de______.	______cuadrados de______.
Entonces, Luciano y Luciana tienen la misma cantidad de chocolates.	

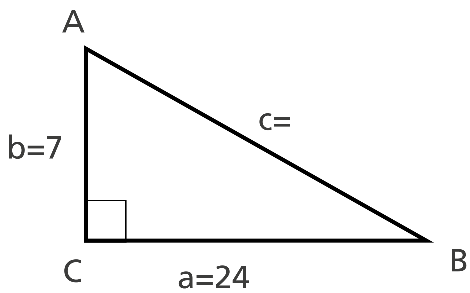
Así demostramos el **TEOREMA DE PITÁGORAS**:



En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la
HIPOTENUSA
Es igual a la suma de los cuadrados de los
CATETOS

Ahora vamos a encontrar el lado que falta de algunos triángulos rectángulos.

Ejemplo: Encontrar el lado "c" del triángulo.



Para encontrar uno de los lados utilizaremos el Teorema de Pitágoras, en este caso nos falta el lado c entonces utilizaremos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A la fórmula reemplazamos los valores de "b" y "a":

$$c = \sqrt{24^2 + 7^2}$$

Resolvemos las potencias:

$$c = \sqrt{576 + 49}$$

Restamos dentro de la raíz:

$$c = \sqrt{625}$$

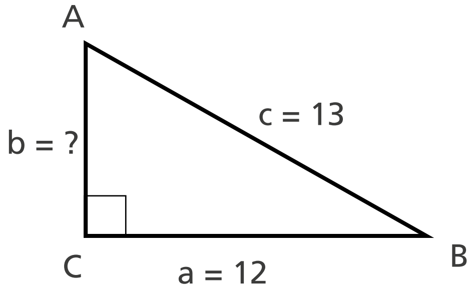
Sacamos la raíz cuadrada de 625:

$$c = 25$$

Entonces decimos que el lado "c" es igual a 25.

El lado "c" llegaría a ser la HIPOTENUSA, por ser el lado con mayor medida o distancia.

Ejemplo: Encontrar el lado "b" del triángulo.



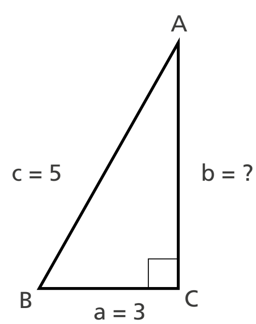
Para encontrar uno de los lados utilizaremos el Teorema de Pitágoras, en este caso nos falta el lado b entonces utilizaremos:

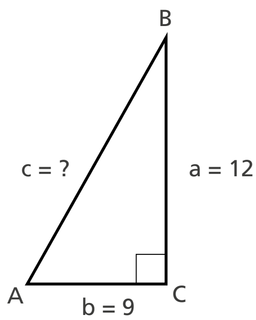
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

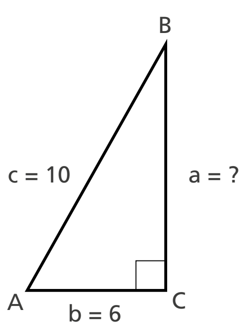
A la fórmula reemplazamos los valores de "c" y "a":	$b = \sqrt{13^2 - 12^2}$
Resolvemos las potencias:	$b = \sqrt{169 - 144}$
Restamos dentro de la raíz:	$b = \sqrt{25}$
Sacamos la raíz cuadrada de 25:	$b = 5$

Entonces decimos que el lado "b" es igual a 5.

Calcula los lados que faltan en los triángulos:

1) 	Para encontrar uno de los lados utilizaremos el Teorema de Pitágoras, en este caso nos falta el lado b entonces utilizaremos: b =
A la fórmula reemplazamos los valores de "a" y "c":	b =
Resolvemos las potencias:	b =
Restamos dentro de la raíz:	b =
Sacamos la raíz cuadrada de:	b =

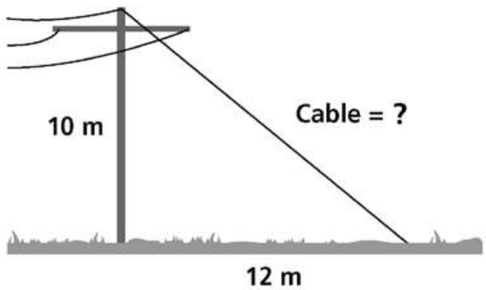
2) 	Para encontrar uno de los lados utilizaremos el Teorema de Pitágoras, en este caso nos falta el lado C, entonces utilizaremos: c =	
A la fórmula reemplazamos los valores de "a" y "b":	c =	
Resolvemos las potencias:	c =	
Restamos dentro de la raíz:	c =	
Sacamos la raíz cuadrada de:	c =	

3) 	Para encontrar uno de los lados utilizaremos el Teorema de Pitágoras, en este caso nos falta el lado a entonces utilizaremos: a =
A la fórmula reemplazamos los valores de "b" y "c":	a =
Resolvemos las potencias:	a =
Restamos dentro de la raíz:	a =
Sacamos la raíz cuadrada de:	a =

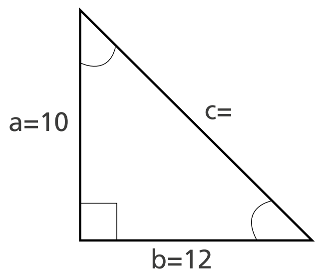
Resolviendo problemas aplicando el Teorema de Pitágoras

Tenemos un poste de energía eléctrica de 10 metros, y para que no se caiga queremos poner un cable desde la punta del poste hasta 12 metros en el piso.

¿Cuántos metros de cable vamos a necesitar?



Tenemos la gráfica.



Le asignamos letras a los lados, el lado más largo será **"c"** y a los restantes ponemos **"a"** y **"b"**.

En este caso nos falta encontrar el lado "c".

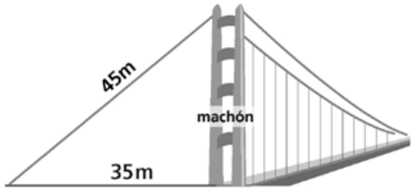
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{10^2 + 12^2}$$

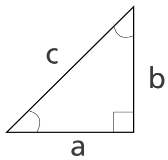
$$c = \sqrt{100 + 144} \quad => \quad c = \sqrt{244} \qquad c = 15.6$$

Resolvemos el problema:

Queremos hallar la altura del machón de uno de los Puentes Trillizos, y desde la punta del machón del puente se jala un cable que mide 45 metros, desde la base del puente hasta el extremo del cable jalado hay una distancia de 35 metros. **¿Cuánto mide el machón del puente?**



Tenemos la gráfica.



Le ponemos letras a los lados, el lado más largo será **"c"** y otros dos lados les ponemos **"a"** y **"b"**.

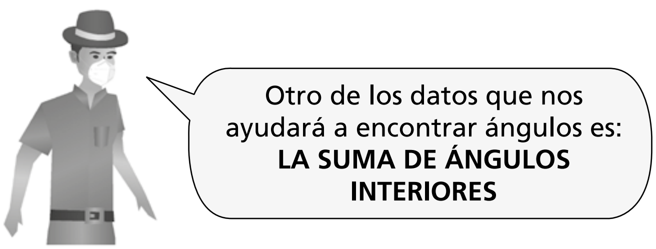
En este caso nos falta encontrar el lado, entonces utilizaremos.

Ahora vamos a reemplazar con los datos.

Resolvemos las potencias.

Sumamos dentro de la raíz.

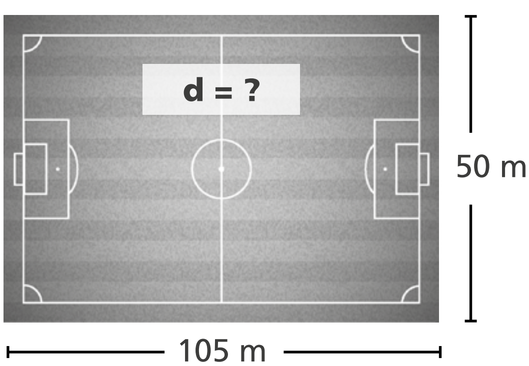
Sacamos de la raíz.



Resolver el problema:

El Club Deportivo Guabirá es un club de fútbol de la ciudad de Montero, el cual tiene una cancha de fútbol que mide 105 metros de largo y 50 metros de ancho, hay una línea que pasa de una esquina hasta la otra esquina de la cancha (diagonal). **¿Cuánto medirá la diagonal que pasa por medio de la cancha de fútbol?**

Tenemos la gráfica.



Le ponemos letras a los lados, el lado más largo será **"c"** y otros dos lados les ponemos **"a"** y **"b"**.

En este caso nos falta encontrar el lado, entonces utilizaremos.

Ahora vamos a reemplazar con los datos.

Resolvemos las potencias.

Sumamos dentro de la raíz.

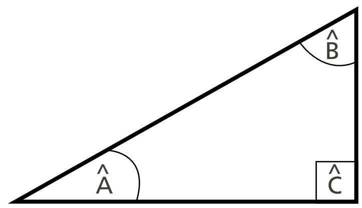
Sacamos de la raíz.

La teoría nos dice que:

“La suma de los tres ángulos interiores en todo triángulo es igual a 180° grados”.

Esto quiere decir que si sumamos los 3 ángulos nos tiene que dar 180°

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

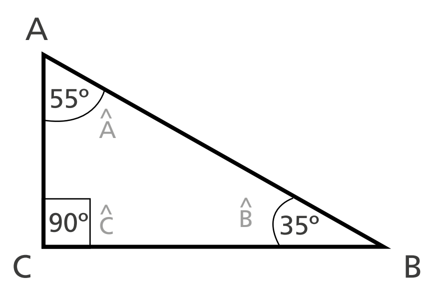


Para encontrar el ángulo $\hat{A}$	Para encontrar el ángulo $\hat{B}$	Para encontrar el ángulo $\hat{C}$
$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C}$	$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C}$	$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

Ahora vamos a sumar algunos ángulos interiores:

Ejemplo: Vamos a comprobar si en verdad la suma de los ángulos es 180°.

Tenemos el triángulo

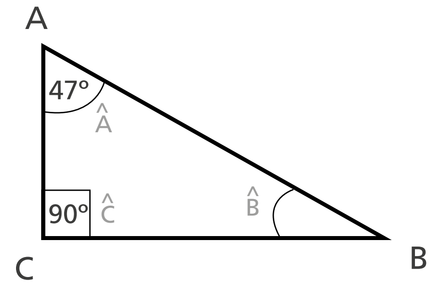


La suma de ángulos interiores dice:	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$
Reemplazando los ángulos tenemos:	55º + 35 + 90 = 180º
Sumamos los tres ángulos:	180º = 180º

Hemos visto que, si sumamos los tres ángulos del triángulo nos da 180°.

Ejemplo: Ahora vamos a encontrar el ángulo que falta:

En este triángulo rectángulo no conocemos el ángulo $\hat{B}$.

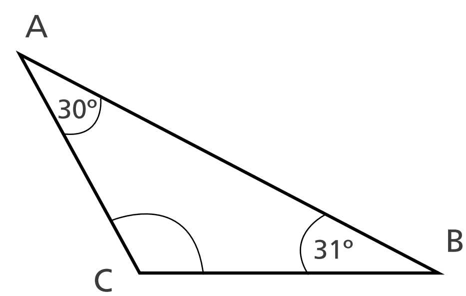


Conocemos los valores de $\hat{A}$ y $\hat{C}$.	$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C}$
Reemplazando datos tenemos:	$\hat{B} = 180° - \hat{47} - \hat{90}$
Restando nos queda:	$\hat{B} = 43°$

El ángulo $\hat{B}$ tiene 43° grados

Ahora vamos a encontrar el ángulo que falta:

En este triángulo rectángulo no conocemos el ángulo C.



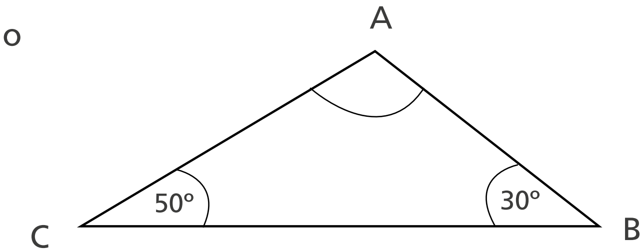
Conocemos los valores de A y B.
Entonces utilizaremos:

Reemplazando datos tenemos:

Restando nos queda:

Ahora vamos a encontrar el ángulo que falta:

En este triángulo rectángulo no conocemos el ángulo A.



Conocemos los valores de C y B.
Entonces utilizaremos:

Reemplazando datos tenemos:

Restando nos queda:

Analicemos y escribamos ¿Cómo calcular el ángulo de elevación del resbalín, desde nuestro punto de vista?

Triángulos oblicuángulos

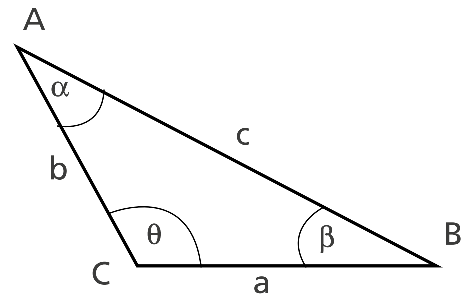
Para resolver triángulos oblicuángulos vamos a utilizar los Teoremas del Seno y del Coseno. Dependiendo de los elementos que conozcamos, nos encontramos con cuatro tipos de resolución de triángulos oblicuángulos:

Resolver un triángulo conociendo un lado y dos ángulos adyacentes.

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \theta$$

$$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{b}{\text{Sin } \beta} \leftrightarrow b = a * \frac{\text{Sen } \beta}{\text{Sen } \alpha}$$

$$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{c}{\text{Sin } \theta} \leftrightarrow c = a * \frac{\text{Sen } \theta}{\text{Sen } \alpha}$$



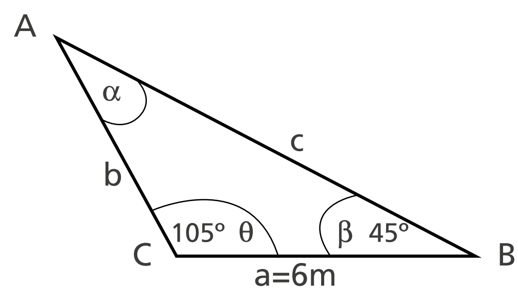
Ejemplo: De un triángulo sabemos que:

Datos:

$\alpha = ?$

$\beta = 45°$

$\theta = 105°$



Calcula los restantes datos, aplicando las formulas explicadas.	$\alpha = 180^\circ - \beta - \theta$
Reemplazamos los datos necesarios.	$\alpha = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ$
Restando con la ayuda de la calculadora.	$\alpha = 30^\circ$
Utilizar la siguiente fórmula para hallar el cateto b.	$\frac{a}{\text{Sen } \alpha} = \frac{b}{\text{Sen } \beta}$
Despejando "b".	$b = a * \frac{\text{Sen } \beta}{\text{Sen } \alpha}$
Reemplazando datos:	$\frac{6}{\text{Sen } 30^\circ} = \frac{b}{\text{Sen } 45^\circ}$
Despejando "b".	$b = 6 * \frac{\text{Sen } 45^\circ}{\text{Sen } 30^\circ}$

Datos: a=12 m α=40° β=75° Resolvemos las funciones trigonométricas con ayuda de la calculadora.	$b = 6 * \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$
Reemplazando valores en la fórmula.	$b = 6\sqrt{2}$ metros
Utilizamos la siguiente fórmula, para hallar el cateto "c".	$\dfrac{a}{\text{Sen }\alpha} = \dfrac{c}{\text{Sen }\theta}$
Despejar el cateto "c".	$c = a * \dfrac{\text{Sen }\theta}{\text{Sen }\alpha}$
Reemplazar los datos:	$c = 6 * \dfrac{\text{Sen }105°}{\text{Sen }30°}$
Resolvemos las operaciones indicadas con ayuda de la calculadora.	c = 11,59 m c = 11,6 m

Ejercicios resueltos

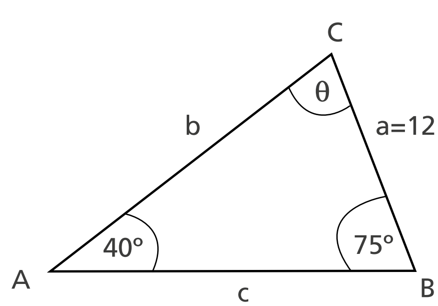
Problema 1. En los Juegos Plurinacionales de la prueba de postas de 4x4, se sitúan a 3 jueces para observar la competencia, Juanita tiene distancia de Pepe de 12 metros, Pepe tiene un ángulo de visión entre Juanita y Constancio de 75° grados y Constancio tienen una visión de 40° grados entre Pepe y Juanita. Se pide calcular los lados y el ángulo que falta del triángulo oblicuángulo que se formó.

Datos:

a = 12 m,

β = 40°

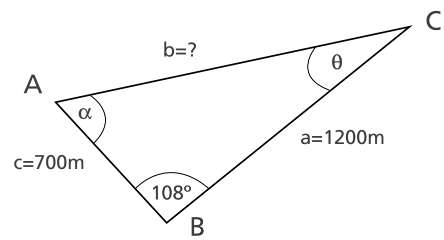
θ = 75°



Como vemos, podemos empezar calculando el lado b o el c, utilizando el teorema del seno. Para el lado b tenemos:	$\frac{a}{\text{Sen }\alpha} = \frac{b}{\text{Sen }\beta}$
Despejando el cateto "b".	$b = a * \frac{\text{Sen }\beta}{\text{Sen }\alpha}$
Reemplazando datos:	$b = 12 * \frac{\text{Sen }75º}{\text{Sen }40º}$
Resolviendo las operaciones indicadas con ayuda de la calculadora.	$b = 18$ m
El ángulo"θ" es fácil de calcular ya que tenemos a los otros dos. Sabiendo que la suma de los tres nos da 180°:	$\alpha = 180º - \beta - \theta$
Despejando de"θ".	$\theta = 180º - \beta - \alpha$
Reemplazando datos:	$\theta = 180º - 75º - 40º$
Resolviendo con la ayuda de la calculadora.	$\theta = 65º$
Para calcular el lado "c" tomamos en cuenta la siguiente fórmula.	$\frac{a}{\text{Sen }\alpha} = \frac{c}{\text{Sen }\theta}$
Despejando el cateto "c"	$c = a * \frac{\text{Sen }\theta}{\text{Sen }\alpha}$
Reemplazando los datos.	$c = 12 * \frac{\text{Sen }65º}{\text{Sen }40º}$
Resolviendo las operaciones indicadas con la calculadora:	$c = 16{,}919$ m $c = 16{,}92$ m

Problema 2. Calcula el lado y los ángulos que faltan del siguiente triángulo oblicuángulo.

Datos:



Como vemos aquí, no se puede utilizar el teorema del seno ya que siempre nos faltará un dato. Tendremos una ecuación con dos incógnitas y eso no lo podremos resolver. Por ejemplo, tenemos el lado c pero no su ángulo opuesto (C) o tenemos el ángulo (B) pero no su lado b. Lo mismo pasa con la relación (A) y a, falta el ángulo. Entonces en este caso, el teorema del coseno es el indicado ya que lo puede resolver.

Para hallar el lado b procedemos así:	$b^2 = a^2 + c^2 - 2*a*c*\cos\beta$
Reemplazamos los datos.	$b^2 = (1.200)^2 + (700)^2 - 2*(1.200)*(700)*\cos 108°$
Realizamos las potencias y el coseno con ayuda de la calculadora.	$b^2 = 1.440.000 + 490.000 - 1.680.000 * (700) * (-0.309)$
Realizamos las operaciones indicadas.	$b^2 = 1.930.000 + 519.120$
Sumamos las cantidades.	$b^2 = 2.449.120$
Despejar "b", pasando la potencia como raíz cuadrada.	$b = \sqrt{2.449.120}$
Sacar la raíz cuadrada	b = 1.565 metros
Ahora podemos sacar el ángulo α o el θ Para el ángulo α utilizamos la siguiente fórmula:	$a^2 = b^2 + c^2 - 2*b*c*\cos\alpha$
Reemplazamos datos.	$1.200^2 = 1.565^2 + 700^2 - 2*1.565*700*\cos\alpha$
Resolvemos las potencias y multiplicación.	$1.440.000 = 2.449.225 + 490.000 - 2.191.000\cos\alpha$
Realizamos la suma.	$1.440.000 = 2.939.225 - 2.191.000\cos\alpha$

Traspasamos términos.	$1.440.000 - 2.939.225 = -2.191.000 \cos \alpha$
Realizamos la operación indicada.	$-1.499.225 = -2.191.000 \cos \alpha$
Despejamos $\cos \alpha$.	$\text{Cos} \propto = \dfrac{-1.499.225}{-2.191.000}$
Resolvemos la división.	$\text{Cos} \propto = 0{,}684$
Ahora con ayuda de la calculadora calculamos la función inversa para obtener el ángulo deseado, la cual es $\cos^{(-1)}$ o Arccos.	$\propto = \text{Cos}^{-1}\, 0{,}684$ $\propto = \text{Arccos}\ 0{,}684$
Resolvemos con la calculadora la operación indicada y luego aplicar la función de grados.	$\propto = 46°\ 50´34´´$
Para calcular el ángulo θ solo le restamos a 180° el valor de los otros dos ángulos. Recordemos que la suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo da 180°.	$\theta = 180° - \beta - \alpha$
Reemplazamos datos.	$\theta = 180° - 108° - 46°\ 50´34´´$
Resolvemos con la ayuda de la calculadora.	$\theta = 25°\ 9´26´´$

Realicemos la siguiente actividad:

Analicemos en nuestro diario vivir, ¿Dónde podemos utilizar el término aprendido de triángulos rectángulo?

R ....

¿Sabías cómo se representa los ángulos de los triángulos?

SI NO

¿En qué momento de nuestro diario vivir, utilizamos lo aprendido sobre la resolución de triángulos oblicuángulos?

R ....

3. VALORACIÓN

Valoremos lo aprendido respondiendo las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué son importantes los triángulos y la trigonometría?

R ....

....

2. Estimado participante, ¿Consideras que se aplican los triángulos, en la vida real?

R ....

....

3. ¿De qué manera incide, lo aprendido en tu vida cotidiana?

R ....

....

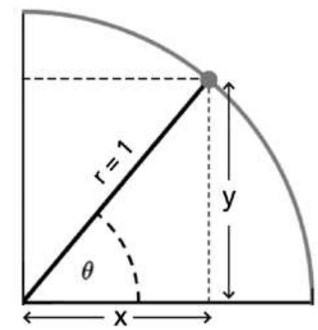
4. PRODUCCIÓN

- Realiza una solución a una situación de necesidad utilizando lo aprendido de triángulos, ángulos para la construcción de materiales que tengan inclinación.
- Realiza un informe donde argumentes ¿cómo utilizaste las propiedades estudiadas para solucionar la situación antes mencionada?
- Realiza una investigación citando ¿qué utilidades adicionales tiene el estudio de trigonometría hasta esta etapa?
- Con lo estudiado hasta el momento, realiza una comparación aplicativa de los triángulos, donde tendrás que realizar un informe, que argumente la utilización de las propiedades de los triángulos oblicuángulos en la vida.

UNIDAD 3
IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. PRÁCTICA

Analizamos y conversamos el caso en el que el Radio del círculo trigonométrico es igual a la unidad, entonces el Teorema de Pitágoras se transformaría:



$r^2 = x^2 + y^2$

Donde: $r = 1$

$\text{Sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$; $\text{Cos } \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$

$y = \text{Sen } \theta$; $x = \text{Cos } \theta$

Entonces: $\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta = 1$

Estableciéndose una identidad, donde para cualquier valor de "θ" se cumple la igualdad.

Prueba con diferentes valores asignados a θ (90°, 180°, 45°) y verificamos la identidad.

$\theta = ? \implies = (\text{sen } \theta)^2 + (\text{Cos } \theta)^2 = 1$

¿Qué utilidad tiene conocer las identidades en la trigonometría? ¿Cómo ayuda las identidades en situaciones reales ante una necesidad? ¿Por qué es necesario construir identidades como modelos matemáticos para dar utilidad en otras ramas de la ciencia? ¿consideras importante tener alternativas en las diferentes ecuaciones trigonométricas?

¿Qué entendemos por identidad?

R ....

¿Qué entendemos por ecuación?

R ....

2. TEORÍA

Una identidad es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verdadera para todos los valores de la incógnita o las incógnitas que se involucran.

Por ejemplo, las igualdades $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ y $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ son identidades, pues se cumplen para cualquier valor de las incógnitas x e y.

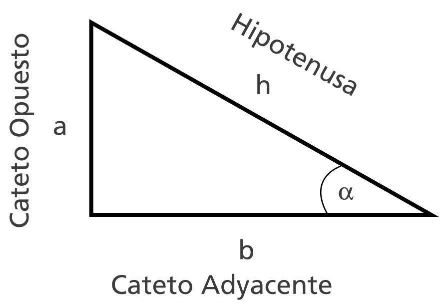
Identidades fundamentales

Se llaman identidades fundamentales a las que se deducen directamente de las definiciones. Estas identidades se utilizan para transformar unas expresiones en otras, lo cual permite comprobar otras identidades y resolver ecuaciones que involucran funciones trigonométricas. A este grupo de identidades pertenecen:

Relaciones recíprocas

Las relaciones recíprocas de las funciones trigonométricas se deducen a partir de las definiciones de dichas funciones en el plano cartesiano.

Identidades Recíprocas: Se denominan de esta manera porque son obtenidas al efectuar el producto entre dos razones recíprocas. Ejemplo “seno y cosecante”



$$\text{sen } \alpha * \text{csc } \alpha = 1$$

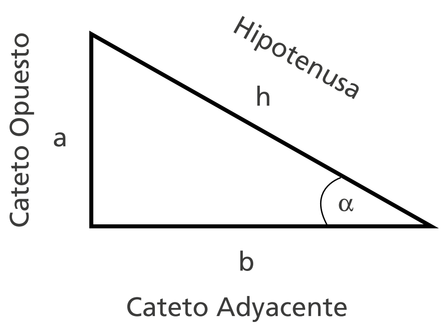
$$\cos \alpha * \sec \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha * \text{ctg } \alpha = 1$$

Relaciones que son por razón de dos funciones

Las relaciones que son por razón son:

Identidades por cociente: Se denominan porque cada una de ellas representa la división o cociente entre otras dos razones trigonométricas.



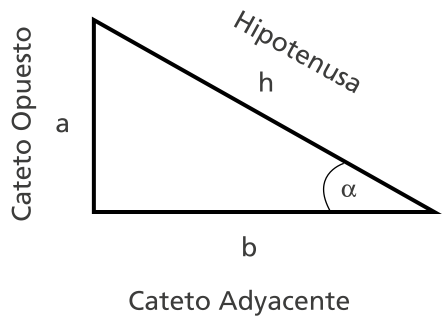
$$\text{Tg} \propto = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{Ctg} \propto = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

Relaciones pitagóricas

Las relaciones pitagóricas son:

Identidades Recíprocas: Se denominan de esta manera porque son producto de la aplicación del teorema de Pitágoras con sus razones trigonométricas.



$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$\text{ctg}^2\,\alpha + 1 = \csc^2\alpha$

Simplificación de expresiones trigonométricas

Las identidades trigonométricas se utilizan para simplificar expresiones que involucran funciones trigonométricas y encontrar expresiones equivalentes. Para realizar la simplificación se utilizan los procedimientos algebraicos.

Aunque no existe un método general que se aplique en los casos de simplificación de expresiones trigonométricas, en algunos casos resulta útil escribir todas las funciones trigonométricas involucradas en términos de una sola función.

Demostración de una identidad

A partir de las identidades trigonométricas fundamentales se pueden deducir algunas que son más complejas.

El método de demostración de una identidad consiste en mostrar que uno de los miembros de una igualdad es igual al otro.

Para ello se sugiere la siguiente secuencia de pasos:

1. Transformar el miembro más complejo de la igualdad en el miembro más simple, haciendo uso de las identidades fundamentales.
2. De ser posible expresar las funciones trigonométricas que aparecen en la igualdad en términos de las funciones seno y coseno.
3. Realizar las operaciones algebraicas para simplificar las expresiones.

Resolvemos la siguientes identidades trigonométricas:

1. Demostrar: $\text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Cot}\,\alpha = \text{Cos}\,\alpha$ 2. Demostrar: $\text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Sec}\,\alpha = \text{Tan}\,\alpha$

Ecuaciones trigonométricas

1. Introducción:

En ocasiones se presentan ecuaciones que involucran funciones trigonométricas. Por ejemplo, **2sen x - 1 = 0**, es una ecuación trigonométrica. En general, las ecuaciones que involucran funciones trigonométricas se resuelven mediante los métodos utilizados para resolver ecuaciones algebraicas.

2. Ideas preliminares:

Como se ha estudiado, una identidad es una igualdad que incluye variables y se cumple para cualquier valor de dichas variables, en tanto que, una ecuación es una igualdad que incluye variables y sólo es cierta para algunos valores de las variables. Las soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita para los cuales se cumple la igualdad. Así, resolver una ecuación es encontrar sus soluciones.

Para resolver ecuaciones se utilizan las siguientes reglas:

a) Si a dos miembros de una ecuación se le suma o resta una expresión (algebraica o numérica), se obtiene una ecuación equivalente.

b) Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por el mismo número, diferente de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

Para comprobar si un número es solución de una ecuación basta sustituir la variable por dicho número en ambos miembros y resolver las operaciones. Si en cada miembro se obtiene el mismo valor, el número reemplazado es solución de la ecuación.

3. Solución de ecuaciones lineales:

Una ecuación lineal es de la forma $\mathbf{ax + b = c}$, con $\mathbf{a \neq 0}$.

4. Solución de ecuaciones cuadráticas:

Una ecuación cuadrática es de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$**, con** $\mathbf{a \neq 0}$. Las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante factorización, completando cuadrados o por medio de la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Ecuaciones trigonométricas – Definición:

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la cual intervienen funciones trigonométricas de un ángulo x y se satisface sólo para algunos valores de x.

Las soluciones de una ecuación trigonométrica son los valores del ángulo para los cuales se cumple la igualdad. Por ejemplo, una solución de la ecuación sen x - 1 = 0 es $x = \pi/2$, porque el sen $\pi/2 - 1 = 0$, puesto que sen $\pi/2 = 1$.

6. Solución de ecuaciones de la forma f(x) = k:

Algunas ecuaciones trigonométricas son de la forma f(x) = k, donde f(x) es una función trigonométrica y k es una constante. Por ejemplo, tan x = 1 es de la forma f(x) = k, donde f(x) = tan x y k = 1. Este tipo de ecuaciones pueden tener infinito número de soluciones.

7. Ecuaciones trigonométricas de la forma cuadrática:

Algunas ecuaciones trigonométricas tienen forma cuadrática, por tal razón para su solución se utilizan los métodos descritos para la solución de la ecuación cuadrática.

8. Ecuaciones trigonométricas con identidades:

Algunas ecuaciones trigonométricas requieren la aplicación de las identidades fundamentales para su solución.

9. Ecuaciones trigonométricas con identidades para ángulos dobles y ángulos medios:

Es posible plantear y resolver ecuaciones que involucran identidades para ángulos dobles y ángulos medios.

10. Ecuaciones trigonométricas con funciones inversas:

Es posible plantear ecuaciones trigonométricas con funciones inversas. Para la solución de dichas ecuaciones se utilizan las definiciones y las propiedades de las funciones inversas.

Resolvamos los siguientes ejercicios:

a) Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos

1. $\text{Sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$
2. $\text{Cos}(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$
3. $\text{Tan}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\text{Tan}\,\alpha \pm \text{Tan}\,\beta}{1 \mp \text{Tan}\,\alpha \cdot \text{Tan}\,\beta}$

Determinar los valores exactos del seno, coseno y tangente de: 75°

a) $\text{Sen } 75° = \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen } 45° \cos 30° + \cos 45° \text{ sen } 30°$

$$\text{Sen } 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}$$

b) $\text{Cos } 75° = \cos(45° + 30°) =$

$\text{Cos } 75° =$

c) $\text{Tan } 75° = \tan(45° + 30°) =$

$$\text{Tan } 75° =$$

b) Funciones trigonométricas del ángulo doble y triple

Ángulo doble	Ángulo triple
1. $\text{Sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$	**1.** $\text{Sen } 3\alpha = 3 \text{ sen}\alpha - 4 \text{ sen}^3\alpha$
2. $\text{Cos } 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2 \alpha$	**2.** $\text{Cos } 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3 \cos\alpha$
3. $\text{Tan } 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	**3.** $\text{Tan } 3\alpha = \dfrac{3 \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$

Determinar los valores de:

$$\text{Sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad \textbf{y} \quad \text{Cos } 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

a) $\text{Sen } 2(15°) = 2 \text{ Sen } 15° \text{ Cos } 15^a =$

b) $\text{Cos } 2\ (15°)$

c) Funciones trigonométricas del ángulo mitad

$$\textbf{Sen } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} \qquad \textbf{Cos } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} \qquad \textbf{Tan } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

1. Sí: $\alpha = 22°30'$, Calcular **Sen**, **Cos** y **Tan** en forma exacta:

a) $\text{Sen } 22° 30' = \text{Sen } \dfrac{45°}{2}$

b) $\text{Cos } 22° 30' = \text{Cos } \dfrac{45°}{2}$

3. VALORACIÓN

Valoremos lo aprendido respondiendo a las siguientes preguntas:

¿En qué momento de nuestra vida utilizamos ecuaciones trigonométricas?

R ....

¿Cómo coadyuva las ecuaciones trigonométricas en las otras ramas de la ciencia?, menciona la relación con 5 ejemplos.

R ....

¿Qué tan útil te resulta construir y deducir ecuaciones trigonométricas para la aplicación?

R ....

4. PRODUCCIÓN

- Realicemos un mapa conceptual de lo aprendido
- Realiza un informe sobre tres de las identidades que consideres útiles para demostrar la igualdad trigonométrica.
- Desarrolla una propuesta de aplicación de las ecuaciones trigonométricas con uno de los ejemplos mencionados.
- Realiza una sistematización de ecuaciones cuadráticas en situaciones donde existe problemáticas que reflejen su utilidad.

UNIDAD 4
GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. PRÁCTICA

Organizados en equipos realicemos el desplazamiento de 7 unidades métricas de acuerdo a la necesidad de tal manera que uno de tus compañeras/os desplace a la misma dirección que realizaste, pero en 5 unidades métricas.

1. ¿Qué medida o distancia hay entre ambos?

R ....

2. Sabías que las casas están hechas de estructuras geométricas básicas. ¿Menciona en qué lugares podemos encontrarlas y si son necesarias en nuestro diario vivir?

R ....

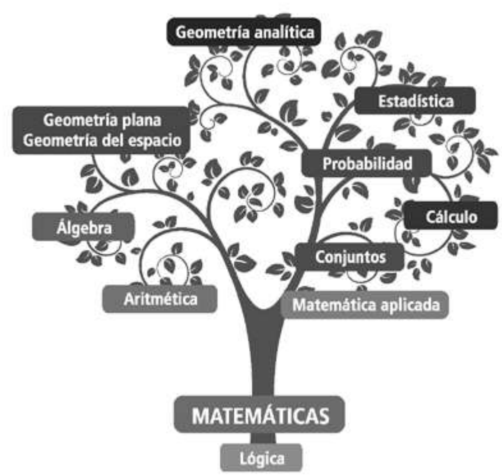
3. Nuestro planeta posee estructuras geométricas básicas en la naturaleza. Identifica alguna de ellas u observa y encuentra algunas.

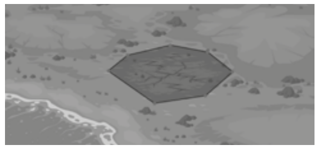
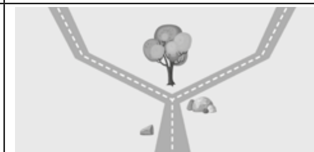
R ....

2. TEORÍA

La geometría es una rama de las matemáticas dedicada al estudio en profundidad de las figuras geométricas y sus respectivos datos, tales como las áreas, distancias, volúmenes, puntos de intersección, ángulos de inclinación.

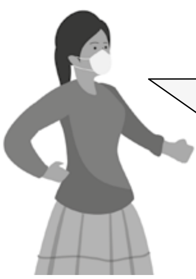
Los análisis de la geometría analítica usualmente comprenden la interpretación matemática de una figura geométrica, es decir, la formulación de ecuaciones, o bien puede ser lo contrario: La representación gráfica de una ecuación matemática, esta equivalencia se encuentra plasmada en la fórmula **$y = f(x)$**, donde f es una función de algún tipo.



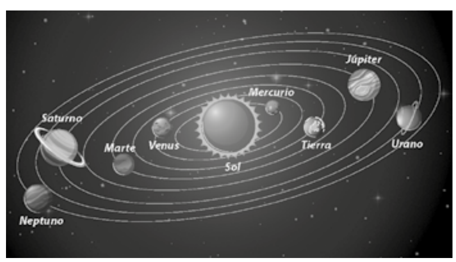
Las figuras		Sus distancias	
Sus áreas		Puntos de intersección	
Ángulos de inclinación		Puntos de división	
Volúmenes			

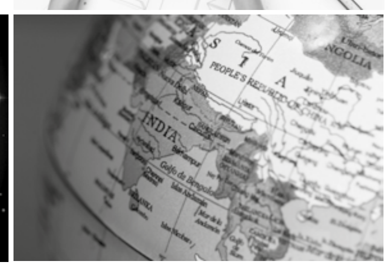
¿En la vida cotidiana dónde aplicamos la geometría analítica?

Aquí te damos unas cuantas respuestas:



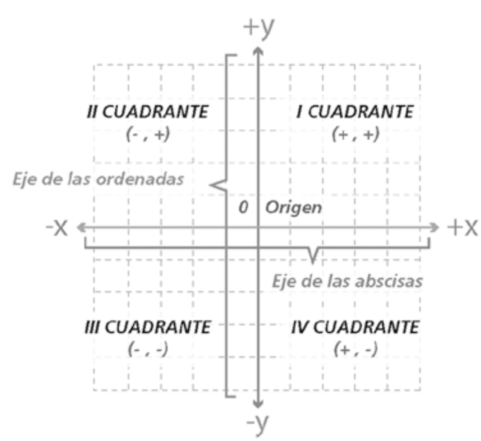
En este contenido vamos a utilizar mucho las gráficas de los ejercicios y lo vamos hacer en el sistema de coordenadas





Sistema de coordenadas

También es llamado plano cartesiano o eje de las coordenadas, y tiene las siguientes partes:

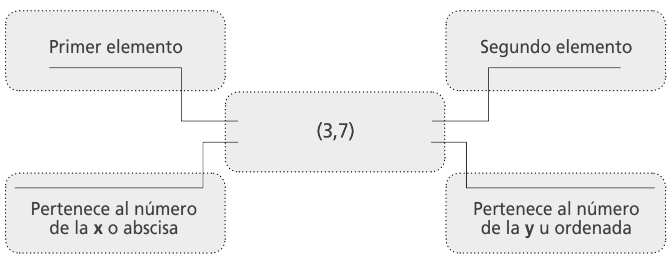


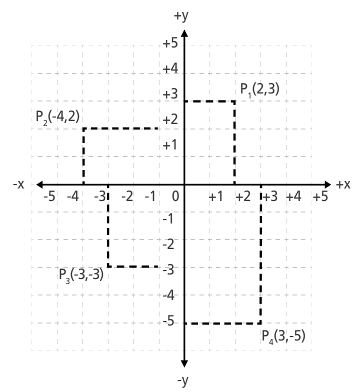
Los signos en el sistema de coordenadas

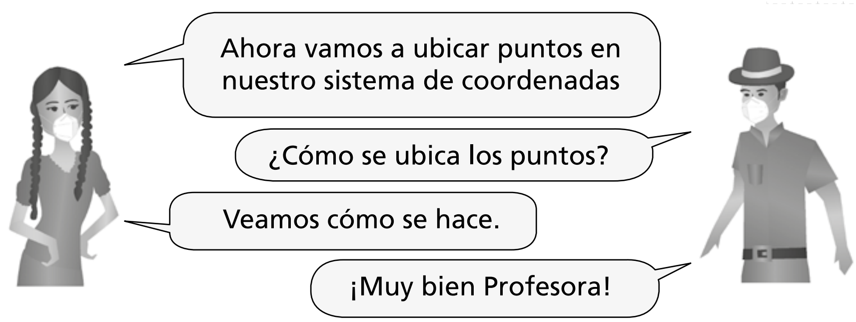
En el eje de las "X" o abscisas. Los números que están a la derecha del origen o punto "0" tienen signo positivo (+) y los números que están a la izquierda del punto cero (0) tienen signo negativo (–).

En el eje de las "Y" u ordenadas. Los números que están arriba del punto cero tienen signo positivo (+). Los números que están abajo del punto cero tienen signo negativo (–).

Par ordenado. Un par ordenado es una pareja de números agrupados entre paréntesis y separados por una coma, en la que se distingue un primer elemento y un segundo elemento.

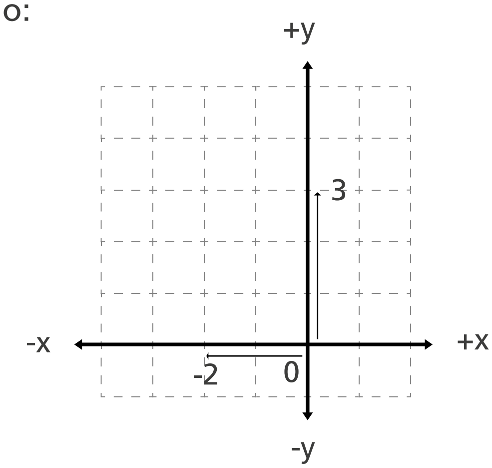






Ubicar puntos en el sistema de coordenadas

Ejemplo: Ubicar el punto P_1 (-2, 3) en el plano cartesiano:



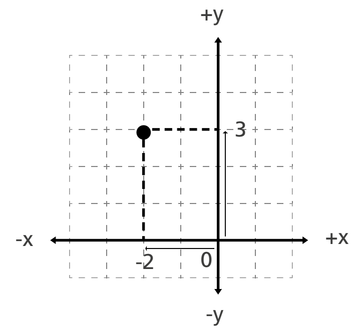
Tenemos que ubicar el punto:

$$P_1\ (-2,3)$$

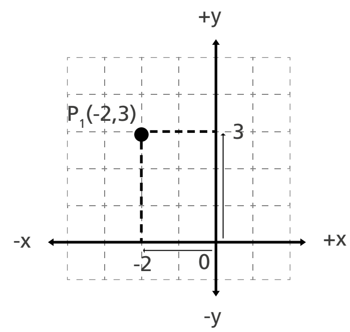
El primer número -2, representa a las "X". Entonces en el eje de las "X", como 2 es negativo avanzamos 2 espacios desde el 0 hacia la izquierda.

El segundo número 3, representa a las "Y". Entonces en el eje de las "Y" como 3 es positivo .

Ahora unimos el – 2 y el 3 siguiendo los caminos.



El punto donde se encuentran, es el punto que estamos buscando.



Recuerda: En el eje de las X, los positivos están a la derecha del 0. Los negativos a la izquierda del 0.

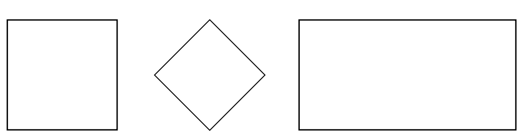
Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano:

A (3,4) ; B (-1,1) ; C (3,-2) ; D (7,1)

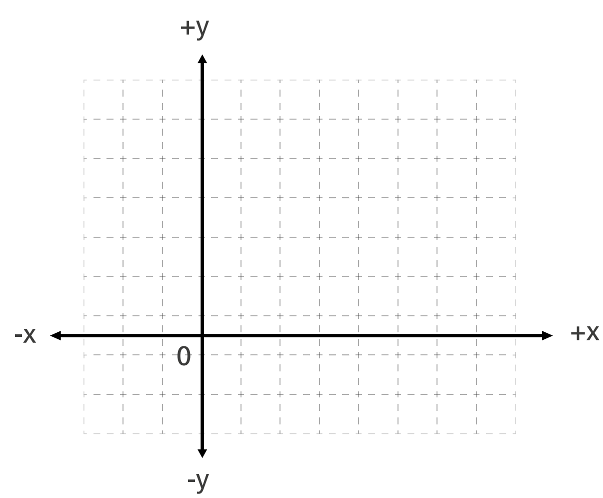
Unir los tres puntos y averiguaremos la figura que es:

¿Qué figura hemos encontrado?

Pintar con el color rojo la figura geométrica correcta.



Cuadrado Rombo Rectángulo

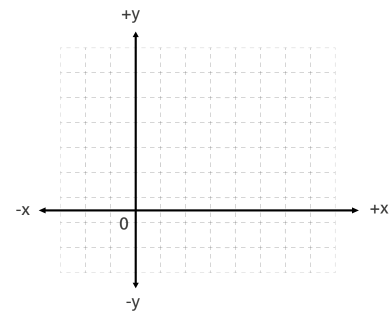


Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano:

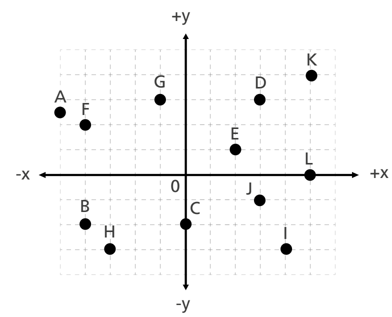
A (1,1) ; B (-2,2) ; C (6,4)

Luego de ubicar los puntos vamos a unir los tres puntos y averiguaremos que figura es:

Respuesta: ....
....



Tenemos los siguientes puntos en el plano cartesiano:



Anotar las coordenadas:

A(,) ; B(,) ; C(0 , -2) ; D(,)

E(,) ; F(,) ; G(,) ; H(,)

I(,) ; J(,) ; K(,) ; L(,)

Tenemos los siguientes puntos:

A(-4,-2) ; B(5, -4) ; C(6, 0) ; D(0, 4)

E(-3, 3) ; F(1, -3) ; G(-4, 4) ; H(-2, -3)

I (4, -2) ; J (4, 2) ; K(3, 5) ; L(6, -4)

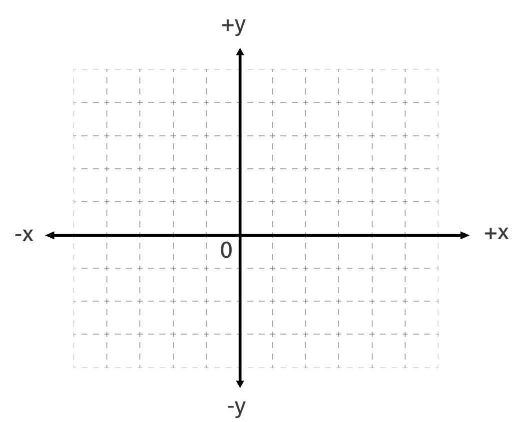
Ubicar los puntos en el plano cartesiano:

Marque con un bien

Todos los puntos ubicar en este mismo plano cartesiano

De la siguiente gráfica:

- Unir con rectas los puntos:
  A y F; E y H; J y D.
- Formar un triángulo con los puntos:
  B, K y G.



Realiza las siguientes averiguaciones:

1. ¿Qué distancia hay desde tu casa hasta la sede de tu comunidad?

R ....

2. ¿Qué distancia hay desde tu casa hasta la escuela de tu comunidad?

R ....

Distancia entre dos puntos y área de figuras planas

Para iniciar este contenido vamos a responder a las siguientes preguntas activadoras:

1. ¿Qué es una distancia?

R ....

2. ¿Desde la ciudad de Cochabamba hasta la ciudad de La Paz, dónde será la mitad del camino?

R ....

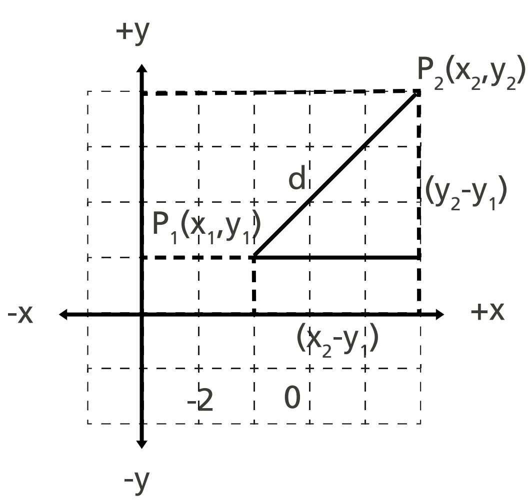
3. ¿Cuántos metros cuadrados habrá en una cancha de futbol?

R ....

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es la línea recta que une a esos 2 puntos, ejemplo:

$$P_1\ (x_1\ ,\ y_1)\ P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$$



Fórmula para hallar distancia entre dos puntos:

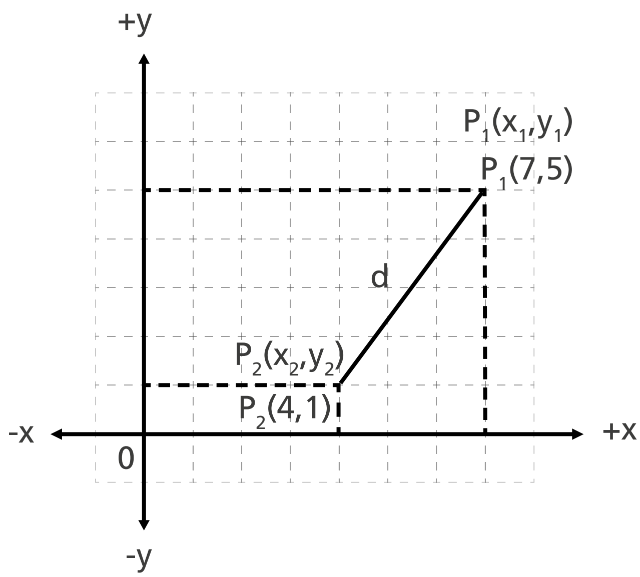
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Fórmula despejada:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Hallar la distancia entre los puntos: P1 (7,5) y P2 (4,1)

Graficando en el plano cartesiano



Resolviendo el ejercicio paso a paso

Fórmula para hallar distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Reemplazamos a la fórmula los puntos

$$P_1 \quad y \quad P_2$$

$$d = \sqrt{(7 - 4)^2 + (5 - 1)^2}$$

Restamos dentro de los paréntesis.

$$d = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

Aplicamos la potenciación

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

Sumamos dentro de la raíz

$$d = \sqrt{25}$$

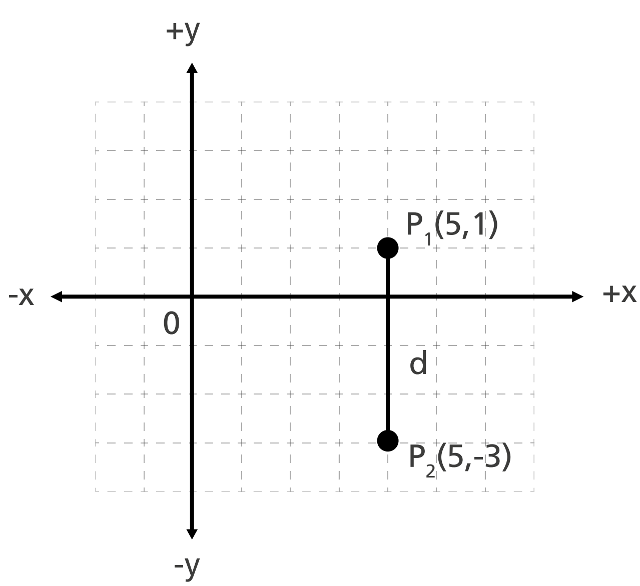
Sacamos la raíz de 25 y tenemos el resultado

$$d = 5 \text{ unidades}$$

Ejemplo:

Hallar la distancia entre dos puntos: P1 (5, 1) y P2 (5, -3)

Graficando en el plano cartesiano



Resolviendo el ejercicio paso a paso

Para dar solución a la distancia entre dos puntos copiamos la fórmula despejada:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Reemplazamos a la fórmula los puntos

$$P_1 \quad y \quad P_2$$

$$d = \sqrt{(5 - 5)^2 + (-3 - 1)^2}$$

Restamos o sumamos dentro de los paréntesis.

$$d = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2}$$

Aplicamos la potenciación

$$d = \sqrt{0 + 16}$$

Sumamos dentro de la raíz cuadrada

$$d = \sqrt{16}$$

Sacamos del signo radical y tenemos el resultado

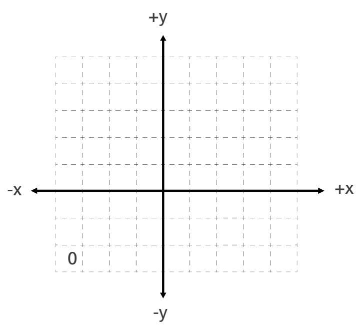
$$d = 4 \text{ unidades}$$

Realizamos:

Graficar y hallar la distancia entre los puntos: P1 (-2, 3) y P2 (4, -2)

Realicemos el siguiente ejercicio en tu cuaderno

Graficando en el plano cartesiano



Resolviendo el ejercicio paso a paso

Para dar solución a la distancia entre dos puntos copiamos la fórmula despejada:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Reemplazamos:

En nuestros cuadernos de prácticas, graficamos y hallamos la distancia de cada lado del triángulo.

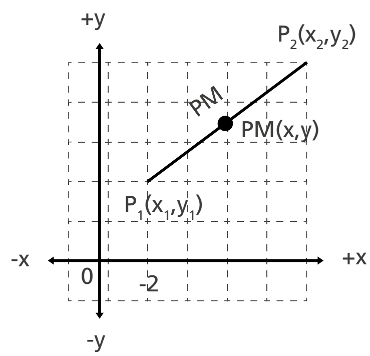
1. A (2,4) ; B(-5,1) y C(-1,3)
2. A (-3,2) ; B(-2,-2) y C(6,0)
3. A (-2,2) ; B(0,3) y C(3,-4)

Para sacar un número de la raíz cuadrada, tenemos que multiplicar un números dos veces

Punto medio de un segmento

Es el punto que se encuentra justo en la mitad de un segmento de recta.

Gráficamente:



Fórmula para hallar el punto medio:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Para encontrar el punto medio, utilizaremos estas dos fórmulas.

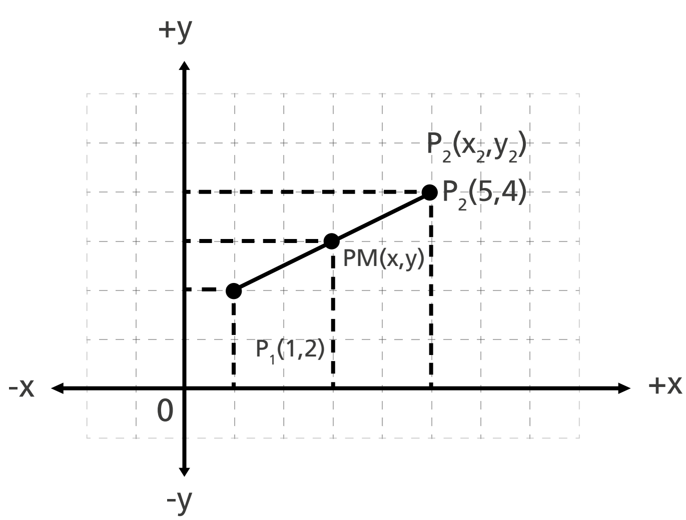
Llenar los cuadros vacíos, de modo que en cada fila, columna y caja de color existan los números del 1 al 4 sin repetirse.

	4		3
4		1	

Ejemplo: Hallemos el punto medio de los siguientes ejercicios:

a) P_1 **(1, 2) y** P_2 **(5, 4)**

Graficando en el plano cartesiano, para encontrar el punto medio del segmento.



Utilizamos las fórmulas de "x", "y":

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Reemplazamos P_1 y P_2 a la fórmula:

$$x = \frac{1+5}{2} \qquad y = \frac{2+4}{2}$$

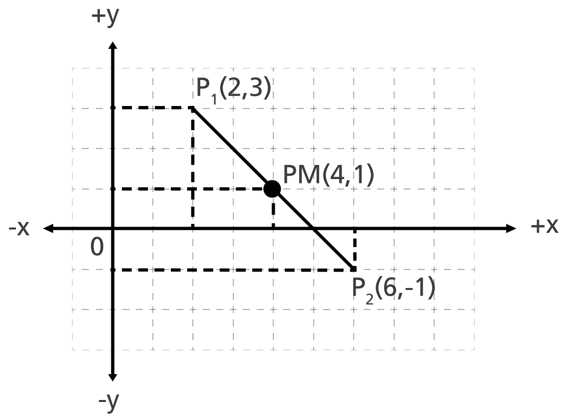
$$x = \frac{6}{2} \qquad y = \frac{6}{2}$$

$$x = 3 \qquad y = 3$$

Resultado: PM (3,3)

b) P_1 (2, 3) y P_2 (6, -1)

Graficando en el plano cartesiano, para encontrar el punto medio del segmento.



Utilizamos las fórmulas de "x" y "y":

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Reemplazamos P_1 y P_2 a la fórmula:

$$x = \frac{2+6}{2} \qquad y = \frac{3+(-1)}{2}$$

$$x = \frac{8}{2} \qquad y = \frac{3-1}{2}$$

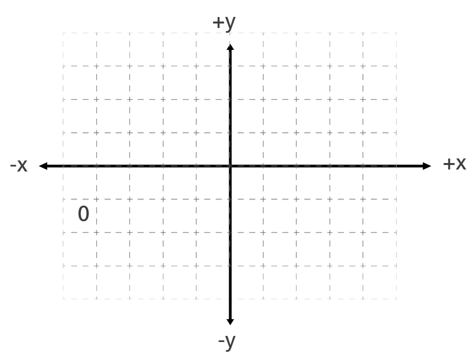
$$x = 4 \qquad y = 1$$

Resultado: M (4,1)

Hallar el punto medio de cada lado de la figura, los puntos son:

A(1,4) ; B(-3,0) ; C(1,-4) ; D(5,0)

Graficando en el plano cartesiano, para encontrar el punto medio del segmento.



Utilizamos las fórmulas de "x" y "y":

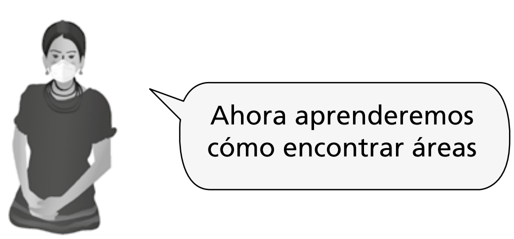
$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

En sus carpetas, hallar el punto medio de cada lado de la figura, los puntos son:

a. A(-3,2) ; B(3,-4) ; C(5,4)

b. A(3,3) ; B(-3,7) ; C(-3,-1)

c. A(-1,-3) ; B(5,-3) ; C(5,3) ; D(-1,3)

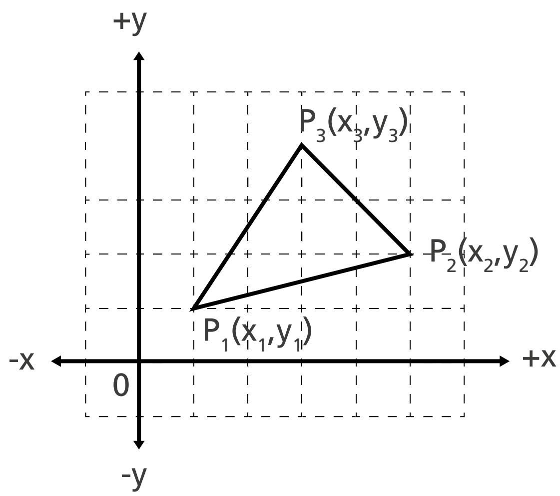


Área de un polígono en función de vértices

Se tiene tres puntos en el plano.

$$P_1\ (x_1\ y_1)\ ;\ P_2\ (x_2,\ y_2)\ ;\ P_3\ (x_3\ y_3)$$

Graficando en plano cartesiano:



Fórmula para encontrar áreas de polígono:

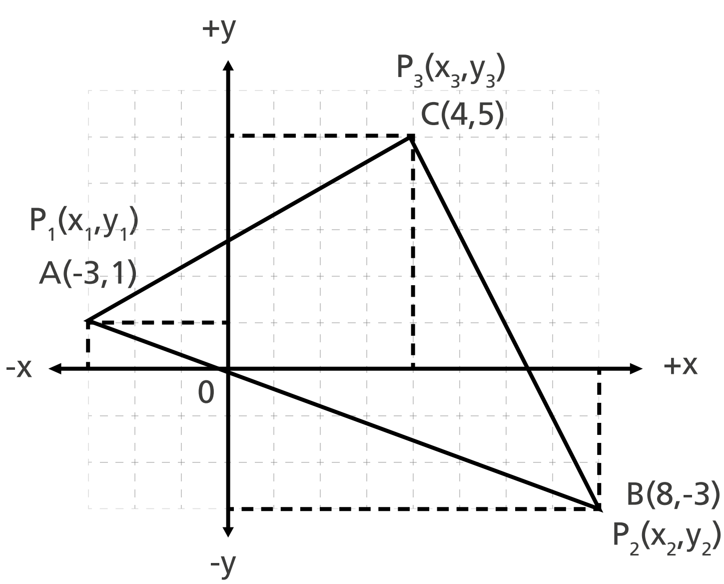
$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

$$A = \frac{1}{2}\ (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3)$$

Ejemplo: Hallamos el área de un triángulo cuyos vértices son: A (-3,1), B (8,-3), C (4,5)

Nota. Para anotar los puntos en la fórmula, hay que hacerlo en sentido contrario a las agujas del reloj.



$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -3 \\ 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

Primer paso: multiplicamos hacia la derecha siguiendo las líneas segmentadas de color naranja, después de color celeste, tomando en cuenta la ley de signos:

$$A = \frac{1}{2}\{(-3)(-3) + (8)(5) + (4)(1) - (8)(1) - (4)(-3)-(-3)(5)\}$$

$$A = \frac{1}{2}\ \{9 + 40 + 4 - 8 + 12 +15\} =$$

Ahora hacemos sumas dentro del paréntesis, primero sumamos todos los positivos y después sumamos todos los negativos:

$A = \frac{1}{2}(80 - 8)$ Restamos dentro del paréntesis.

$A = \frac{1}{2}(72)$ Restamos dentro del paréntesis.

$A = \frac{72}{2}$ Realizamos la división.

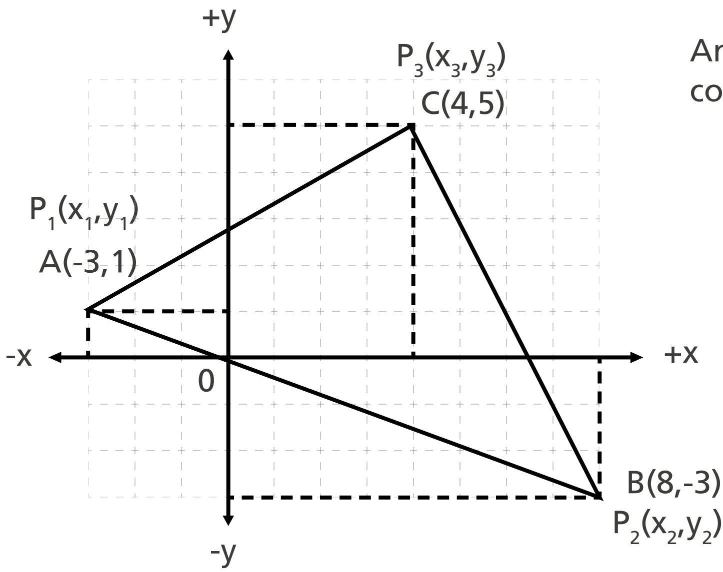
$A = 36\ [u^2]$

Dentro del triángulo tenemos un área de 36 unidades cuadradas.

Encontrar el área del triángulo: A(3,3) ; B(-3,7) ; C(-3,-1)

Los vértices A,B y C, y graficamos en el plano cartesiano en sentido contrario de las agujas del reloj:

Para encontrar el área del triángulo utilizamos la fórmula:



Anotamos pares en sentido contrario a las agujas del reloj

$$A = \frac{1}{2}\left[\qquad \qquad \right]$$

1. ¿Cuántos metros cuadrados tiene tu dormitorio?

R ....

2. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el patio de tu casa?

R ....

3. El contenido que aprendiste ¿Cómo y dónde puedes aplicarlo en tu vida diaria, familia, comunidad o contexto?

R ....

3. VALORACIÓN

¿Cómo aplicarías estos conocimientos en tu vida y en tu contexto?

¿Qué tan importante es la geometría analítica para responder a las necesidades locales?

Realiza un bosquejo sobre la utilidad de la geometría analítica y sobre el ejemplo de la práctica señale cuales son las fórmulas más utilizadas en las construcciones.

4. PRODUCCIÓN

- Construye un plano cartesiano con los materiales de tu región, traza un triángulo y calcula su área.

MÓDULO II:
ECONOMÍA Y MATEMÁTICA FINANCIERA

OBJETIVO HOLÍSTICO

Promovemos prácticas de convivencia armónica para la vida en familia reconociendo el empleo de la contabilidad en nuestra vida diaria mediante la aplicación de procesos contables, presupuesto, ingresos y egresos para contribuir al emprendimiento laboral y económico en nuestra comunidad.

UNIDAD 5
ECONOMÍA FAMILIAR Y COMUNITARIA

1. PRÁCTICA

Pedro tenía un trabajo de costurero de mochilas donde veía cómo las maneras de producción adquirían forma y secuencia al momento de producir, cada operario se dedica a una tarea especifica, pero los fines de semana, él se dedicaba a vender gelatinas donde el proceso de producción era diferente al de las mochilas.

¿En esta realidad como identificamos las microeconomías y macroeconomías?, ¿de qué manera se puede evidenciar estudiar la oferta y demanda?, ¿desde la visión de tus compañeros cómo identificamos los sistemas de distribución y que tan eficiente es la seguridad laboral para las microempresas?

2. TEORÍA

Economía

Ciencia que se ocupa administrar, con objeto de producir bienes y servicios, distribuirlos para su consumo entre los miembros de la sociedad. Dividir la economía en dos grandes áreas de estudio:

Microeconomía

- Estudia todos aquellos fenómenos y procesos inherentes al funcionamiento de una economía de pequeña escala.

Macroeconomía

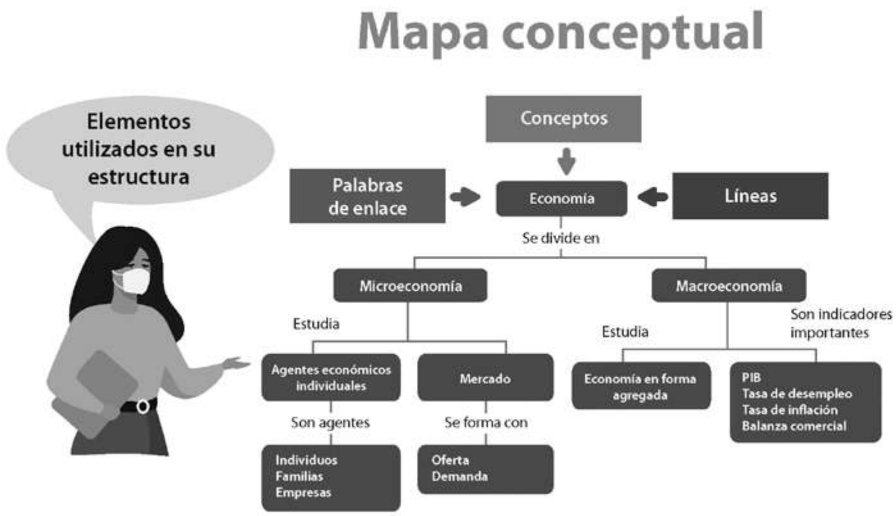
- Estudia el comportamiento económico las de empresas, hogares e individuos interacción con los mercados.

Mercado es un conjunto de vendedores y compradores que se interrelacionan, posibilitando realizar intercambio.

El mercado es la necesidad que poseen las personas u organizaciones teniendo la habilidad y la voluntad de comprar un producto o servicio para el consumo. Las personas dependiendo de sus necesidades y deseo de adquirir un producto o servicio. El cliente es aquel que compra un producto lo consume o usa.

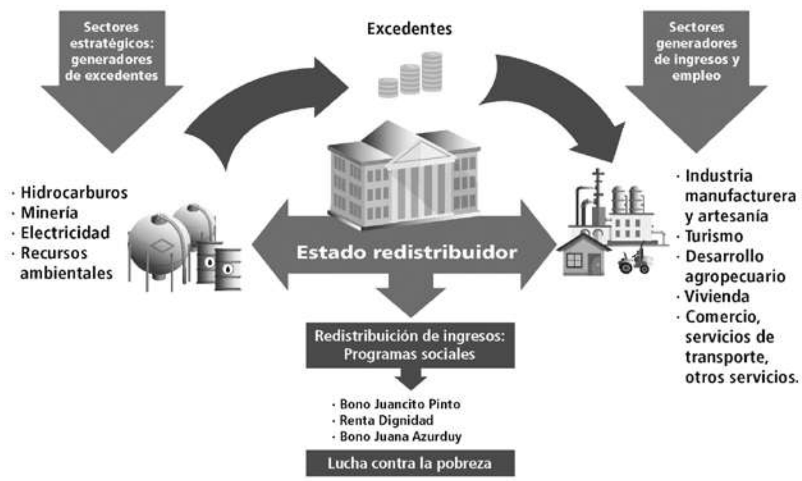
OFERTA

DEMANDA



El Estado como redistribuidor

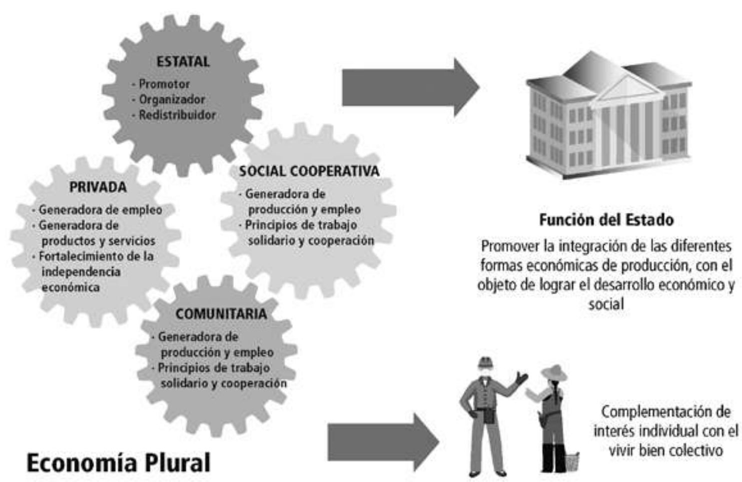
Es el redistribuidor, el que debe tener la capacidad de transferir los recursos de los sectores excedentarios a los generadores de empleo e ingreso. Lo que se busca es liberar a Bolivia de la dependencia de exportación de materias primas para abandonar el modelo primario exportador y construir una Bolivia industrializada y productiva, dando valor agregado a sus productos.



¿Quiénes son los actores en este modelo?

La Constitución Política del Estado establece cuatro actores fundamentales de la Economía Plural: El Estado, el sector privado, las cooperativas y las comunidades.

El Estado es el actor fundamental, promotor, organizador, redistribuidor del ingreso. La empresa privada que genera empleo y



tiene independencia en relación al Estado para formular su producción y su distribución, también está presente la economía social cooperativista, arraigada no solamente en las minas, sino también en el sector rural y en el sector financiero.

El Estado debe fomentar la economía comunitaria con apoyo tecnológico, financiero y además se debe integrar a los tres actores ya mencionados.

Actividad

Encuentra las siguientes palabras en la siguiente sopa de letra, los cuales son valores muy importantes para una buena administración de nuestros recursos económicos.

- ECONOMÍA
- MERCADO
- OFERTA
- DEMANDA
- MICROECONOMÍA
- MACROECONOMÍA
- PIB

G	D	J	R	M	L	E	A	L	T	A	D	M
O	A	A	E	C	O	N	O	M	I	A	E	A
F	D	I	S	M	S	I	H	Z	G	J	M	C
E	I	E	P	E	F	V	H	T	V	T	A	R
R	R	Z	O	R	I	P	O	O	H	P	N	O
T	A	B	N	C	D	I	H	O	A	P	D	E
A	D	H	S	A	E	B	F	P	M	H	A	C
T	I	X	A	D	L	X	F	B	I	R	N	O
L	L	G	B	O	I	C	C	N	I	E	O	N
N	O	B	I	S	D	U	O	N	S	S	N	O
M	I	C	R	O	E	C	O	N	O	M	I	M
T	B	P	I	O	D	X	N	I	O	E	P	I
G	A	E	D	N	S	L	L	H	I	T	C	A
I	A	L	A	T	N	H	Z	V	U	O	Z	S
M	I	C	R	O	E	C	O	N	O	M	I	A

3. VALORACIÓN

1. ¿Crees que es importante saber de economía? ¿Por qué?

R ....

2. ¿Sabes cuál es la función que cumple la economía en un país?

R ....

3. ¿Cómo se desarrolla la economía en nuestro país?

R ....

4. PRODUCCIÓN

Tomando como ejemplo la sopa de letras anterior, elabora:

- Un crucigrama enunciando preguntas de reflexión respondiendo la importancia de estudiar esta temática.
- Elabora un informe adicional para justificar las preguntas.

UNIDAD 6

MATEMÁTICA APLICADA AL ÁREA COMERCIAL DE LA FAMILIA Y LA COMUNIDAD

1. PRÁCTICA

Observamos la imagen

Ismael y Edwin, decidieron prestarse dinero de dos instituciones financiera, Ismael decidió prestarse dinero de una casa de empeño y Edwin de un Banco, ambos se prestaron 5.000 Bs. pero resulta que al finalizar el año Ismael hizo una sumatoria donde vio que el monto que pago era de 8.600, mientras que de su hermano era de 9.800 Bs. Entonces esto los llevo a indagar ¿cómo funcionaban los tipos de préstamos?, ¿Qué tipos de interés influyen en un determinado tiempo para cubrir la deuda mas los intereses?, así también ¿si es importante manejar libro diario de gastos para evaluar los gastos en función a la necesidad?

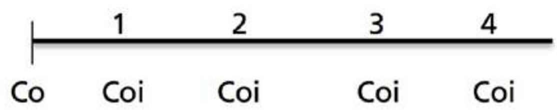
2. TEORÍA

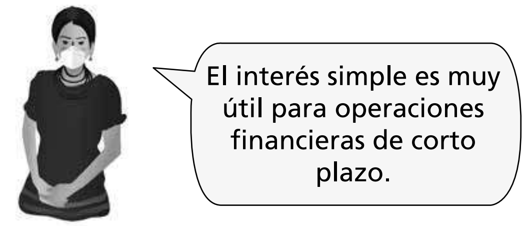
Interés simple

Es la cantidad de dinero obtenida como retribución o utilidad por haber prestado un capital.

El interés varía en función del tiempo a mayor tiempo de préstamo se debe pagar mayor interés, un interés menor si el tiempo es menor; así el interés se paga no por el dinero mismo sino por el transcurso del tiempo de tenencia del dinero.

Tipos de años
- Año comercial 360 días.
- Año común 365 días.
- Año bisiesto tiene 366 días.





Simbología:

I = Interés simple

Co = Capital prestado

n = Tiempo de préstamo

i = Tasa o tipo de interés (%)

Cn = Monto final del periodo, capital inicial más el interés.

$i = \frac{\%}{100}$ (es el tanto por uno)

$Cn = Co\,(1 + n \cdot i)$

Fórmula

$$I = Co * n * i$$

Cálculo de interés

$$I = Co * n * \frac{i}{360}$$

La señora María Pérez desea realizar un préstamo del Banco Unión, un capital de Bs. 20.000 al 22% anual por 180 días. ¿Cuál será el interés?	
Identificar los datos.	$i = 22\%$ $Co = 20.000$ $n = 180$ días
Remplazar los datos.	$I = Co * n * i$ $I = 20.000 * 180 * \frac{0.22}{360}$ $I = 2.200$

El señor Mario Camargo, desea realizar un prestamos determinar, cuál será el interés que produce un capital de 3500 si se lo presta al 18% anual por 270 días.	
Identificar los datos.	$i = 18\%$ $Co = 3.500$ $n = 270$ días
Remplazar los datos.	$I = Co * n * i$ $I = 3.500 * 270 * \frac{18}{100}$ $I = 472,5$

Fórmula para periodos fraccionarios

i = anual

n = años

Se tiene $I = Co * n * i$

n = Semestre → $I = Co * \frac{n}{2} * i$

n = Cuatrimestre → $I = Co * n * \frac{i}{3}$

n = Trimestre → $I = Co * \frac{n}{4} * i$

n = Bimestre → $I = Co * \frac{n}{6} * i$

n = Meses → $I = \frac{Co}{12} * n * i$

n = Días → $I = \frac{Co}{360} * n * i$

Resolver

1)

El señor Juan Carlos Menacho Soliz desea realizar un préstamo de Banco Fácil, un capital de Bs 4.500 si se lo presta al 15% anual por 7 meses. ¿Cuál será el interés?	
Identificar los datos.	i = 15% Co = 4.500 n = 7 meses
Remplazar los datos.	$I = Co * n * i$ $I = 4.500 * \frac{7}{12} * 0,15$ I= 393.75

Cálculo de los demás elementos

Cálculo de capital prestado “Co”

$$Co = \frac{I * 360}{n * i}$$

2)

Marcela Plaza Pereira desea saber el monto de dinero que debe prestar para que al cabo de 9 meses y 15 días el interés producido al 24% anual sea de Bs. 1.850.	
Identificar los datos.	i = 24% I = 1.850 n = 9 mese y15 días = 285 días
Remplazar en la fórmula	$Co = \frac{I * 360}{n * i}$ $Co = \frac{1.850 * 360}{285 * \frac{24}{100}}$ Co = 9.736,84 Bs.

3)

Aldo Vaca desea obtener un interés de Bs. 2.000 cada mes si la tasa de interés es del 28% anual. ¿Cuál será el capital?	
Identificar los datos.	I = 28% Co = 2.000 n = 1 mes = 30 días
Remplazar en la fórmula	$Co = \frac{I * 360}{n * i}$ $Co = \frac{2.000 * 360}{30 * \frac{28}{100}}$ Co = 85.714,29

Calculo de “n”.

Cálculo de tiempo de préstamo “n“

$$n = \frac{I * 360}{Co * i}$$

4)

Pablo Casas desea prestar un capital de Bs 10000, percibir un interés de Bs 500, si la tasa de interés es del 18% anual. ¿Cuánto tiempo debe durar el préstamo?	
Identificar los datos.	i = 18% Co = 10.000 n = ?
Remplazar los datos en la formula.	$n = \frac{I * 360}{Co * i}$ $n = \frac{500}{100\cancel{0} \cdot \frac{18}{10\cancel{0}}}$ $n = \frac{50\cancel{0}}{18\cancel{0}} = \frac{50}{18} = 2{,}78$ [años]

5)

Roger Pérez presta un capital de Bs. 5.000 al 36% anual. ¿Cuánto tiempo será necesario para generar un interés de Bs. 500?	
Identificar los datos.	i = 36% anual Co = 5.000 I = 500
Remplazar los datos en la formula.	$n = \frac{I}{Co * i}$ $n = \frac{50\cancel{0}}{5\cancel{00}\cancel{0} \cdot \frac{36}{1\cancel{00}}} = \frac{\overset{10}{\cancel{50}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 36}$ $= \frac{10}{36} = 0{,}28$ [años]

Calculo de tipo de interés "i".

$$i = \frac{I * 360}{Co * n}$$

6)

A que tasa de interés fue prestado un capital de Bs 9.000 si al cabo de 220 días produce un interés de Bs 1.250.	
Identificar los datos.	I = 1.250 Co = 9.000 n = 220
Remplazar los datos.	$i = \frac{1.250 * 360}{9.000 * 220}$ i = 0.22727 [anual]

Monto del interés simple “i”.

Es la suma del capital más el interés.

7)

En cuánto se convertirá un capital de Bs 8.500 si se lo presta al 24% anual por 270 días.	
Identificar los datos.	$i = 24\% = \frac{24}{100} = 0{,}24$ $Co = 8.500$ $n = 270$
Remplazar los datos.	$Cn = Co\ (1+n*i)$ $Cn = 8.500 \left(1 + \frac{270}{360} \cdot 0{,}24\right)$ $Cn = 10.030$

8)

Cuánto recogerá la prestamista de Prenda Fácil la Sra. Martha Sánchez por un capital de Bs 5.000 prestado por 300 días al 22% anual.	
Identificar los datos.	$I = 22\% = 0{,}22$ $Co = 5.000$ $n = 300$
Remplazar.	$Cn = 5.000 \left(1 + \frac{300}{360} \cdot 0{,}22\right)$ $Cn = 5.916{,}66$

Cálculo de capital prestado “Co”.

$$Co = \frac{Cn}{1 + n \frac{i}{360}}$$

9)

Cuánto presto la señora Deysi Zarate si al cabo de 251 días y una tasa de 28% anual recoge un capital de Bs. 5.000.	
Identificar los datos.	$I = 28\% = 0{,}28 = \frac{28}{100} = 0{,}28$ $Co = 5000$ $n = 251$ días
Remplazar.	$Co = \frac{5000}{1 + 250 * \frac{0.28}{360}}$ $Cn = \frac{5000}{1{,}19444}$ $Cn = 4.186{,}06$

Calculo de “Cn”.

$$Cn = Co \frac{(1+n*i)}{360} \qquad Cn = Co \frac{(1+n*i)}{12}$$

10)

Cuánto deberá recoger por concepto de su capital e intereses un prestamista por un capital de Bs. 20.000 al 18% anual por 6 meses.	
Identificar los datos.	I = 18% Co = 20.000 n = 6 meses
Remplazar los datos.	$Cn = 20.000 \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0,18\right)$ Cn = 20.000 (1+ 0.09) Cn = 21.800

11)

En cuánto se convertirá un capital prestado de Bs 6.000al 22% anual al cabo de 270 días.	
Identificar los datos.	I = 22% Co = 6.000 n = 270 días
Remplazar los datos.	$Cn = 6.000 \left(1 + \frac{270}{360} \cdot 0,22\right)$ Cn = 6.000 (1.165) Cn = 6.990

Realizamos en tu cuaderno de trabajo los siguientes ejercicios:

1) A qué tasa de interés un capital de Bs. 3000 se convertirá en Bs. 4000 si se lo presta por 300 días.
2) Cuál será el interés que producía un capital de Bs. 400 si se lo presta al 10% anual por 7 meses.
3) Cuál será el interés que producía un capital de Bs. 5000 si se lo presta al 25% anual por 7 meses.
4) Cuál será el interés que producía un capital de Bs. 400 si se lo presta al 5% anual por 7 meses.
5) Cuál será el interés que producía un capital de Bs. 800 si se lo presta al 7% anual por 7 meses.
6) Cuál será el interés que producía un capital de Bs. 7000 si se lo presta al 25% anual por 12 meses.
7) Cuál será el interés que producía un capital de Bs. 4000 si se lo presta al 8% anual por 10 meses.
8) Cuál será el interés que producía un capital de Bs. 5500 si se lo presta al 25% anual por 13 meses.

La contabilidad

Ciencia que estudia el registro sistemático de los hechos económicos, siendo así un medio para analizar, clasificar, registrar, en términos monetarios, todas las transacciones parciales o totales de carácter financiero, la contabilidad debe ser en idioma castellano, entendible, fidedigno permitiendo así su fácil interpretación mediante estados financieros, con el propósito de no generar tropiezos de sus administradores con referente a la toma de decisiones financieras.

Orígenes del comercio

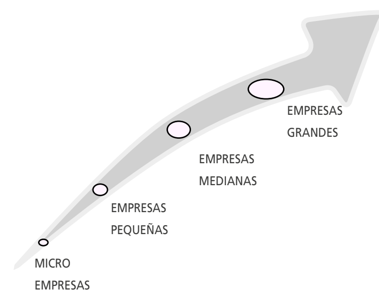
Ser remontan a la época de trueque de la era del Neolítico. Se denomina comercio a la actividad socioeconómica consistente en la compra y venta de bienes.

Empresa

Se denomina empresa a toda actividad económica organizada para la producción, transformación circulación administración de bienes o prestación de servicios con la finalidad de obtener lucro (Ganancia).

Clasificación de las empresas

Por su tamaño



Son aquellas empresas constituidas capitales particulares.

Es aquella que está formada por capitales y administrada por el Estado.

Empresas mixtas

Son aquellas constituidas por las empresas públicas y privadas.

Las Empresas, Corporativa y Gran nacional tendrán tipologías de Empresa Estatal Mixta o Empresa Mixta, de acuerdo a lo establecido por la Ley N° 466.

Clasificación por su organización

Empresa unipersonal

Son las que tienen un solo dueño.

Empresa sociedades. “Dos o más personas”

- Sociedad colectiva.
- Sociedad en comandita simple.
- Sociedad en comandita por acciones.
- Sociedad de responsabilidad limitada. (SRL)
- Sociedad anónima.

Clasificación por su actividad

Empresas comerciales

Se dedica a comprar bienes para luego venderlos.

No transforma los bienes.

Pueden comercializar materias primas, productos semiterminados o productos terminados.

Mayoristas (volúmenes grandes), minorista (volúmenes pequeños).

Empresas mixtas

Es una sociedad mercantil que compra bienes o extrae materias primas y los vende previa transformación.

Empresas de servicios

Son las que brindan servicios. Productos intangibles.

Empresas extractivas

Son las que extrae los recursos naturales.

Cuenta y plan de cuenta

Es la unidad básica de la contabilidad y se utiliza para registrar las transacciones de la entidad. Pueden ser de naturaleza deudor o acreedor.

Las cuentas se clasifican en:

1. Cuentas de balance

Ropa Deportiva "Lizeth"			
Balance General			
31 de Diciembre 2018			
Activos		**Pasivos**	
Activos corrientes		**Pasivos corrientes**	
Efectivo o caja	Bs. 46.000,00	Cuentas por pagar	Bs. 50.000,00
inventario	Bs. 50.000,00		Bs. 10.000,00
Local comercial	Bs. 15.000,00		
Total	Bs. 111.000,00	Total	Bs. 60.000,00
Activos fijos		**Pasivos no corrientes**	
Mobiliario	Bs. 25.000,00	**Préstamo bancario**	Bs. 20.000,00
Intangibles		**Patrimonio**	
Software contable		**Capital**	
TOTAL ACTIVOS	**Bs. 140.000,00**	**TOTAL PASIVOS MÁS PATRIMONIO**	**Bs. 140.000,00**

2. Cuentas de resultados

Almacén la Castellana, Estado de resultados (Diciembre 31 de 2011)		
VENTAS		50.000.000
Inventario Inicial		12.000.000
Mas: compras		60.000.000
Mercancía disponible para la venta		72.000.000
Menos: inventario final		32.000.000
Costo de mercadería vendida		40.000.000
Utilidad Bruta		10.000.000
Menos:		
Gastos de administración	2.000.000	
Gastos de ventas	1.000.000	3.000.000
Utilidad operacional		7.000.000
Menos:		
Gastos no operacionales	500.000	500.000
Utilidad neta operacional		6.500.000

3. Cuentas de orden

Las cuentas del balance son:

Cuentas de activo

De las cuentas de activo se deberán agrupar todas aquellas que representen bienes, valores y derechos que posee una empresa.

Ejemplo:

Activos corrientes

- Caja M/N
- Banco
- Cuentas por cobrar

Activos no corrientes

- Bienes de uso
- Edificio
- Terreno
- Muebles y enseres
- Equipo de computación

Cuentas de pasivo

Son aquellas cuentas que representan obligaciones de una empresa hacia terceras personas ya sean naturales o jurídicas.

Ejemplo:

Pasivo corrientes o a corto plazo

- Cuentas por pagar
- Sueldos y salarios por paga

Pasivo no corrientes o a largo plazo

- Hipotecas por pagar
- Prestamos por pagar

Cuentas de patrimonio

Deberán agruparse todas aquellas cuentas que representen Aportes de Capital, Reservas y Resultados.

Capital

- Capital social

Reservas

- Reserva legal

Resultados

- Utilidad de la gestión

Cuentas del resultado

U = I - E

P = E – I

U = Utilidad	E = Egreso
I = Ingreso	P = Patrimonio

Cuentas de ingreso

Son ganancias de beneficios y deberán agruparse todas aquellas cuentas que representen ingresos obtenidas en una empresa, en el desarrollo de sus actividades.

Ejemplo:

- Venta de mercadería
- Intereses ganados

Cuentas de egreso - gasto

- Servicios básicos
- Gastos administrativos

Cuentas de costo

Son todas aquellas cuentas que representan aplicación de recursos en el proceso de comercialización o de producción efectuados en una empresa al desarrollar sus actividades, para ser recuperadas al momento de realizarse la venta correspondiente.

Ejemplo:

- Costo de ventas

Cuentas del orden

Las cuentas de orden deberán agruparse todas aquellas cuentas que no tienen incidencia sobre el patrimonio de una empresa.

Ejemplo:

- Mercaderías recibidas en consignación
- Resultados por exposición a la inflación

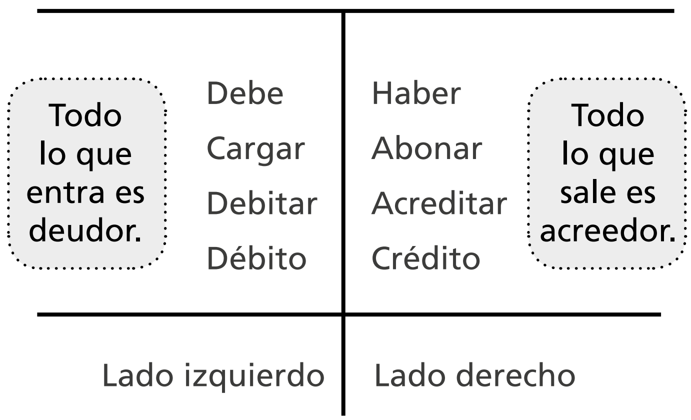
Partida doble

Está basada en el principio de la lógica denominada "Ley de la Casualidad", cuyo postulado consiste en la causa y efecto de las cosas.

Principio de la partida doble

- No hay deudor sin acreedor

- No hay acreedor sin deudor
- Si alguien compro es porque alguien vendió
- Todo lo que entra es deudor y todo lo que sale es acreedor

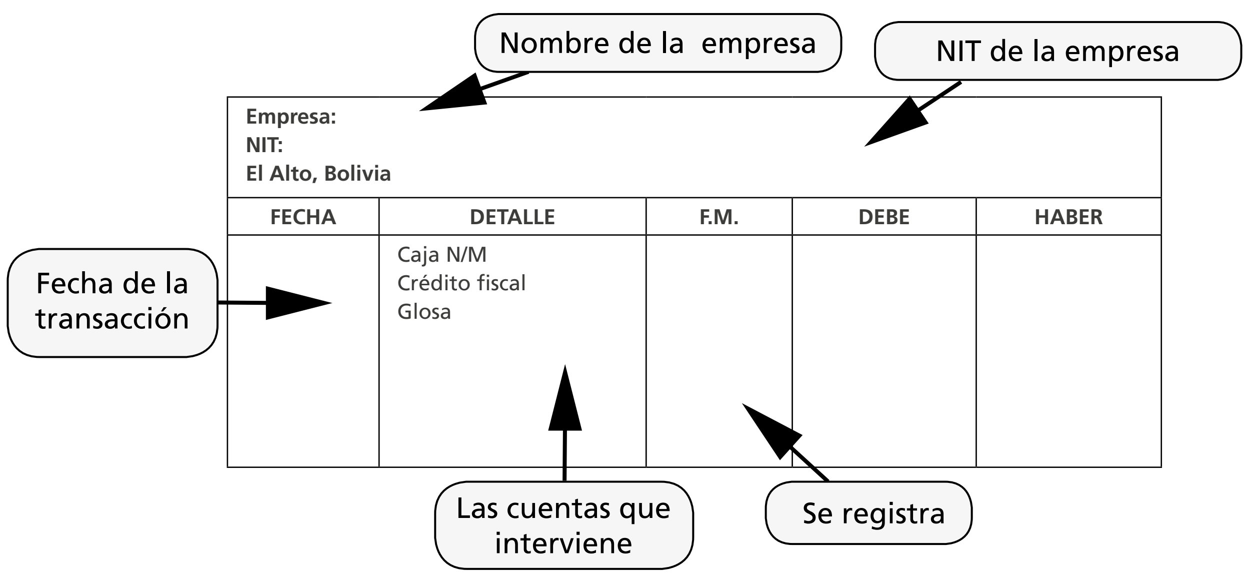


DEBE	HABER	SALDO
A +	A -	Deudor
P -	P +	Acreedor
P* -	P* +	Acreedor
E +	E -	Deudor
I -	I +	Acreedor
C +	C -	Deudor

Libros de contabilidad exigidos por Ley

Los libros que todo comerciante debe llevar obligatoriamente son:

Libro diario



Libro mayor

Mayores en "T"

CAJA	
Debe	Haber

CAPITAL	
Debe	Haber

MERCADERÍA	
Debe	Haber

VENTAS	
Debe	Haber

CMV	
Debe	Haber

Comprobante de Diario (Expresado en Bolivianos)		
Nº Folio	**Debe**	**Haber**
Preparado por:	Revisado por:	Aprobado por:

Kardex de inventario

TARJETA KARDEX PARA EL CONTROL DE LOS MATERIALES (Expresado en Bolivianos)								
Artículo: Código: Ubicación: Responsable:				Met. Vol: Cont. Max Cont Min: Unidad Med				
Fecha	**Detalle**	**C. Unit**	**Cantidades**			**Importes**		
			Entradas	Salidas	Saldos	Entradas	Salidas	Saldos

Informes financieros y su forma de presentación debe cumplir normas, según el Código de Comercio son siguientes artículos "Ley 843":

Art.37.- (CLASES DE LIBROS). El comerciante debe llevar, obligatoriamente, los siguientes libros: Diario, Mayor y de inventario y Balances, salvo que por ley se exijan específicamente otros libros. Podrá llevar además aquellos libros y registros que estime convenientes para lograr mayor orden y claridad, obtener información y ejercer control. Estos libros tendrán la a calidad de auxiliares y no estarán sujetos a lo dispuesto en el artículo 40, aunque podrán legalizarse los considerados necesarios para servir de medio de prueba como los libros obligatorios.

Art. 40.- (FORMA DE PRESENTACIÓN DE LOS LIBROS). Los comerciantes presentaran los libros obligatoriamente deben llevar, encuadernados y foliados, a un Notario de FE PÚBLICA para que, antes de su utilización, incluya, en el primer folio de cada uno, acta sobre la aplicación que se le dará, con indicación del nombre de aquél a quien pertenezca y el número de folios que contenga, fechada y firmada por el Notario interviniente, estampando, además, en todas las hojas, en el sello de la notaria que lo autorice y cumpliendo los requisitos fiscales establecidos.

Serán también válidos los asientos y anotaciones que se efectúen por cualquier medio mecánico o electrónico sobre hojas removibles o tarjetas que serán legalizados, siempre que faciliten el conocimiento de las operaciones y sirvan de prueba clara, completa y fidedigna. La autorización para su empleo será otorgada por el Registro de Comercio, a pedido del interesado, requiriendo resolución fundada sobre la base de dictamen de peritos, del cual podrá prescindirse en caso de existir antecedentes de utilización respecto del procedimiento propuesto.

Encuentra en la siguiente sopa de letras las siguientes palabras:

PRIVADA
PÚBLICA
COMPRENSIÓN
ECONOMÍA
PASIVO
LIBROS
MAYOR
GASTOS
EGRESO
PATRIMONIO

G	D	J	R	M	L	E	A	L	T	A	D
C	A	A	E	P	R	I	V	A	D	A	A
H	D	I	S	C	E	I	H	Z	G	J	D
J	I	P	P	O	C	V	H	T	R	T	I
H	R	U	O	M	O	S	O	O	H	P	T
P	A	S	I	V	O	H	Y	O	A	P	S
A	D	L	I	B	R	A	S	P	M	H	E
T	I	G	A	S	T	O	S	B	I	R	N
R	L	C	B	N	O	S	E	R	G	E	O
I	O	A	I	S	A	U	O	N	S	S	N
M	S	K	L	I	A	I	D	D	E	P	F
O	B	P	I	O	D	X	N	I	O	E	P
N	A	E	D	N	S	L	L	H	I	T	C
I	A	L	A	T	N	H	Z	V	U	O	Z
O	S	X	D	A	M	I	S	I	A	D	U

Ecuación contable

1. ¿Calculas tu patrimonio cuando realizas alguna compra?

R ....

2. ¿Cuánto dinero tienes destinada para la comprar de alimentos de la canasta familiar?

R ....

Activo. Son todos los bienes y derechos que tiene la empresa.

Ejemplo: Edificio, mobiliario, clientes, caja, vehículo, cuentas cobrar, inventarios de mercadería, crédito fiscal y otros.

Pasivo. Son todas las obligaciones que tiene la empresa con terceros.

Ejemplo: cuentas por pagar, sueldos y salarios por pagar, débito fiscal y otros.

Capital o patrimonio

Es la inversión, suma de las aportaciones de los socios de una empresa.

Ecuación de balance

Se denomina ecuación de situación, ecuación de cuentas reales o ecuación de cuentas patrimoniales, a la igualdad que expresa una relación financiera del activo respecto al Pasivo más el patrimonio, correspondiente a una empresa en determinada fecha.

Fórmula

$$A = P + P^*$$

SIMBOLOGÍA	
A	ACTIVO
P	PASIVO
P *	PATRIMONIO

a) Activo

ACTIVO = PASIVO + PATRIMONIO

Se denomina activo a la suma de bienes, valores y derechos que posee una empresa.	
Bienes	Se denomina bienes al conjunto de recursos con los que cuenta una empresa: - Bienes de Cambio. - Bienes de Uso. - Bienes Inmateriales.
Valores	Se denominan valores a los títulos negociables, que representan la colocación transitoria permanente de recursos con la finalidad de obtener beneficios.
Derechos	Al conjunto de facultades que posee una empresa para poder exigir algo en su beneficio a otras personas naturales o jurídicas, emergente al realizarse operaciones de venta de mercaderías al crédito.
Recursos Humanos	Se denomina recursos humanos, se refieren a personas naturales que están a cargo las actividades de una empresa, como el dueño, socios y el directorio.

b) Pasivo

Es la suma de obligaciones de una empresa hacia terceras personas naturales y/o jurídicas.

PASIVO = ACTIVO – PATRIMONIO

$$P = A - P^*$$

PASIVO	
Obligaciones	Al conjunto de imposiciones con las que debe cumplir una empresa a favor de otras personas naturales jurídicas, emergentes de realizarse operaciones de compra de mercadería.
Terceras personas	Se denominan terceros, aquellas personas naturales y /o jurídicas que han realizado o realizan transacciones con una determinada empresa y que no pertenecen a la misma.

c) Patrimonio

Son los aportes de capital, reservas y resultados.

PATRIMONIO = ACTIVO – PASIVO

P* = A - P

PATRIMONIO	
Aportes de Capital	Se denominan aportes de capital al conjunto de recursos que el propietario (Socio, Accionista) de su patrimonio personal a favor de la empresa, tales aportes pueden ser en Bienes, Valores y /o derechos.
Reservas	Se denomina reservas al conjunto de respaldos de capital.
Resultados	Se denominan resultados al conjunto de utilidades y perdidas obtenidas en el ejercicio de un determinado periodo de una empresa.

Ecuaciones de resultados

Se denominan ecuaciones de resultados a las igualdades que expresan una relación financiera de la utilidad o perdida con relación a los ingresos y gastos correspondientes a una empresa en un determinado tiempo de trabajo.

Ingreso	Se denominan ingresos a la suma de transacciones valuadas en términos de unidades monetarias expresadas en cantidades, que representan obtención de beneficios o ganancias obtenidas en una empresa emergentes del giro específico de sus actividades.
Gastos	Se denominan gastos (egresos) a la suma de transacciones valuadas en términos de unidades monetarias expresadas en cantidades que representan erogaciones irrecuperables.
Utilidad	La utilidad es el exceso de los ingresos respecto a los gastos, es decir, que por ello se obtiene la ganancia y crecimiento de la empresa.
Pérdida	Es el exceso de egresos respecto a los ingresos, es decir que por esta perdida la empresa puede encontrarse en problemas.

$$U = I > E$$

$$U = I - E$$

Ecuación fundamental

$$A = P + P^*$$

10.000 = 3.700+6.300

10.000 = 10.000

$$P^* = A - P$$

P*= 10.000-3.700

P*= 6.300

$$E = I$$

42.000 = 39.100

Perdida = 2.900

$$I = E$$

42.000 = 39.100

Utilidad = 2.900

$$P = A - P^*$$

P = 10.000-6.300

P = 3.700

EJEMPLO 1	
En fecha 1 de enero del 2020, la empresa CHAPAQUITO de la Sra. Vaca inicia sus actividades con la siguiente información: Efectivo en Bs. 8.100 Cuentas por cobrar al cliente Ramos por Bs. 24.300 Inventario de mercadería por Bs. 12.500 Cuentas por pagar al proveedor Sr. Toro por Bs. 32.000 El aporte de capital Bs. 12.900	
Determinar la ecuación de balance clasifica las cuentas de activo, pasivo y patrimonio.	A = P + P* 8.100 + 12.500 + 24.300 = 32.000 + 12.900
Sumas iguales	44.900 = 44.900

EJEMPLO 2	
La empresa Rodríguez del Sr. Rodrigo inicia actividades al 1ro. de marzo 2016 los siguientes bienes y aportes. Equipo de Computación Bs. 12.500 -Un inmueble Bs. 102.000 -Un vehículo Bs. 53.000 -Una letra por cobrar Bs. 5.000 Aporte de capital Bs. 90.000	
PRIMER PASO: Determinar la incógnita que en este caso es pasivo con la siguiente formula despejando.	A = P + P* P = A – P*
Reemplazar los valores.	P = 12.500+102.000+53.000+5.000 - 90.000 P = 172.500 – 90.000 P = 82.500
SEGUNDO PASO: Reemplazar con la ecuación de balance los datos ya obtenidos. A = P + P*	172.500 = 82.500 + 90.000
Sumas iguales	172.500 = 172.500

<table>
<tr><th colspan="2">EJEMPLO 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ferretería “CAMBITA” propiedad de la Sra. Paola Méndez dedicada a la comercialización de materiales de construcción presenta información al 03 de febrero del 2018.
• Dinero en dólares 500 (T/C 6.97)
• Dinero en efectivo 17.000
• Dinero Banco Ganadero 12.800
• Letras a pagar Sr. Marcos F. Bs. 4.800
• Una computadora Bs. 4.200
• Muebles 14.096
• Línea telefónica Bs. 3.800
• Vehículo Bs. 12.900
• Cuentas a pagar Sra. Beatriz Bs. 1.890
• Inventario de mercadería Bs. 35.125
• Cuentas a cobrar de Bs. 1.800. Sr. Gómez
• Capital Bs. ………….?</td></tr>
<tr><td>Primer paso: Despejar la incógnita de la ecuación general.</td><td>A = P + P*
P* = A – P</td></tr>
<tr><td>Reemplazar</td><td>P* =17.000+3.485+12.800+4.200+14.096+ 3.800+12.900+35.125+1.800 - 4.800 -1.890
P* = 172.500 – 2.910
P* = 98.516 = 169.590</td></tr>
<tr><td>Segundo paso:
Reemplazar con la ecuación de balance los datos ya obtenidos.</td><td>A = P + P*
105.206 = 98.516 + 29.10 = 101.426</td></tr>
<tr><td>Sumas iguales</td><td>105.206 = 105.206</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>EJEMPLO 4 PARA EL PARTICIPANTE</th></tr>
<tr><td>La empresa “CAMBITA” del Sr. Mario Menacho Soliz inicia actividades al 24 de septiembre de 2020 los siguientes bienes y aportes.
Equipo de Computación Bs. 1.300
• Un inmueble Bs. 100.000
• Un vehículo Bs. 50.000
• Una letra por cobrar Bs. ?
Aporte de capital Bs. 150.000</td></tr>
</table>

Primer paso: Determinar la incógnita que en este caso es pasivo con la siguiente formula despejando.	
Reemplazar los valores.	
Segundo paso: Reemplazar con la ecuación de balance los datos ya obtenidos A = P + P*	
Sumas iguales	

EJEMPLO 5 PARA EL PARTICIPANTE	
Ferretería “POTOSINA” propiedad de la Sra. Gladys Mendoza Mamani dedicada a la comercialización de materiales de construcción presenta información al 03 de abril del 2021. • Dinero en dólares 200 (T/C 6.97) • Dinero en efectivo 7.000 • Dinero Banco Ganadero 2.800 • Letras a pagar Sr. Marcos Guarachi. Bs. 4.800 • Una computadora Bs. 3.200 • Muebles 14.000 • Línea telefónica Bs. 1.800 • Vehículo Bs. 12.000 • Cuentas a pagar Sra. Maribel Perez Bs. 1.800 • Inventario de mercadería Bs. 33.500 • Cuentas a cobrar de Bs. 1.800. Sr. Aldo Martínez • Capital Bs. ………….?	
Primer paso: Determinar la incógnita que en este caso es patrimonio con la siguiente fórmula despejando:	P* = A – P
Reemplazar	
Segundo paso	
Sumas iguales	

Ecuación de resultados

La empresa POTOSINA representada por la Sra. María presenta la siguiente información al 31 de diciembre del 2018:

- Ingresos por venta de Bienes Bs. 30.000
- Otros ingresos por alquileres Bs. 25.000
- Gastos por energía eléctrica Bs. 18.000
- Gastos por sueldos y salarios Bs. 10.000
- Otros ingresos por intereses Bs. 5.000

SE PIDE. Determinar si existe pérdida o ganancia

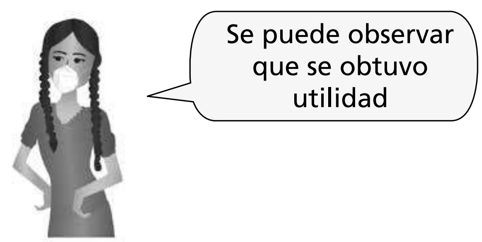
INGRESOS		EGRESOS	
Venta de bienes	30.000	Servicios Básicos	18.000
Alquileres	25.000	Sueldos y Salarios	10.000
Intereses	5.000		28.000
	60.000		

U = I > E

U = I - E

U = 60.000 > 28.000

U = 32.000



Ejemplo:

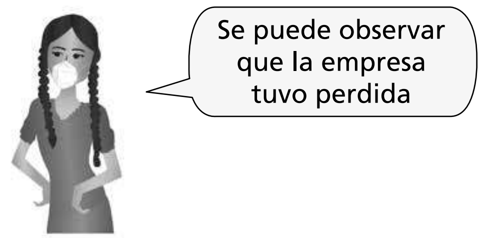
La empresa ORIENTE representada por la Sra. María Antelo presenta la siguiente información al 31 de diciembre del 2018:

- Ingresos por venta de Bienes Bs. 20.000
- Otros ingresos por alquileres Bs. 20.000
- Gastos por energía eléctrica Bs. 15.000
- Gastos por sueldos y salarios Bs. 15.000
- Otros ingresos por intereses Bs. 5.000

SE PIDE. Determinar si existe pérdida o ganancia.

INGRESOS		EGRESOS	
Venta de bienes	20.000	Servicios	15.000
Alquileres Intereses	20.000	Básicos	15.000
	5.000	Sueldos y	30.000
	45.000	Salarios	

$$U = I > E$$
$$U = I - E$$
$$U = 45.000 > 30.000$$
$$U = 15.000$$



Ejemplo:

La empresa BERMEJO representada por la Sra. Carmen Ayaviri presenta la siguiente información al 31 de diciembre del 2018:

- Ingresos por venta de Bienes Bs. 80.000
- Otros ingresos por alquileres Bs. 25.000
- Gastos por energía eléctrica Bs. 100.000
- Gastos por sueldos y salarios Bs. 100.000
- Otros ingresos por intereses Bs. 5.000

Determinar si existe pérdida o ganancia

INGRESOS		EGRESOS	
Venta de bienes	80.000	Servicios Básicos	100.000
Alquileres	25.000	Sueldos y Salarios	100.000
Intereses	5.000		200.000
	110.000		

$$U = I > E$$
$$U = I - E$$
$$U = 110.000 > 200.000$$
$$U = 90.000$$

Para el participante

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios:

1.-En fecha 10/11/18 Se constituye la comercial LÍDER. El capital está constituido de la siguiente manera: Mercaderías Bs. 45.000, efectivo Bs. 50.000, equipo de computación Bs. 25.000
2.- En fecha 12/02/20 Los señores, Fernando Fernández deciden constituir la sociedad "EL CUMPA". El capital está constituido de la siguiente manera: Bs. 64.000 en efectivo, mercaderías por un valor de Bs. 32.000, muebles y enceres por Bs. 64.000
3.- En fecha 02/01/18 Se constituye la comercial "POSITOS" El capital está constituido de la siguiente manera: Efectivo Bs. 35.000, varios muebles Bs. 25.000, vehículo automotor Bs. 30.000
4.- En fecha 02/09/20 Se constituye la comercial "BONITO Y BARATO" El capital está constituido de la siguiente manera: Muebles Bs. 10.000, Depósito banco mercantil Bs. 50.000, mercaderías Bs. 15.000
5.- En fecha 02/04/2020 Los señores Luís Pérez, decide constituir la empresa "CHAPAQUITO" S.C. El capital está constituido de la siguiente manera: Mercaderías por un valor de Bs. 55.000, equipo de computación Bs.20.000 y vehículo por Bs. 45.000

Registro contable

Los registros contables o transacciones comerciales son la esencia dentro el ciclo contable para la generación de estados financieros. Para efectuar un registro contable o denominado también asiento contable, como origen debe tener un documento mercantil, documentación de respaldo o documentación fuente para efectuar el registro contable.

Ejemplo: Un padre de familia cobra su sueldo cobra su sueldo por Bs. 5.200 de los cuales gasto para sus 6 hijos, para sus uniformes por el inicio de clases Bs. 600, alimentación Bs. 1.200 para los cosméticos de su esposa Bs. 500 para servicios básicos Bs. 700 y pasajes Bs. 400.

DEBE	HABER
5.200	600 1.200 500 700 400
5.200	3.400
1.800	

LIBRO DIARIO

Empresa Modelo S.A. DIARIO GENERAL				
FECHA	DESCRIPCIÓN	REF	DEBE	HABER
28 / 08 / 2020	Caja	1.1.1	3.000,00	20.000,00
	Bancos	1.2.3	15.000,00	
	Equipos de computación	1.2.4	2.000,00	
	a) Capital	3.1.1		
	Para registrar los aportes del señor Cesar Lara, como nuevo socio de la CIA		-------------- 20.000,00	------------- 20.000,00

Saldos que se presentan

El registro realizado en él debe y el haber nos permiten determinar a una fecha dada el saldo final que posee en valores monetarios, el cual se obtiene por diferencia entre el total del lado del debe y el haber el cual se obtienen dos clases de saldos deudor y acreedor.

Saldo deudor. -Se denomina saldo deudor cuando la sumatoria del lado DEBE expresado en valores monetarios es mayor a la columna del haber. El saldo deudor es equivalente al **DEBE menos HABER**.

SALDO DEUDOR = Debe > Haber

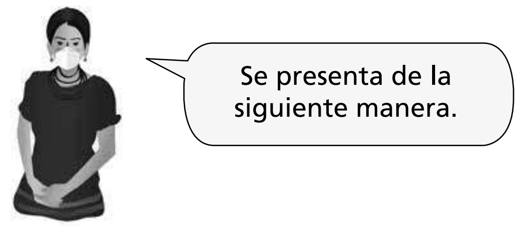
SALDO ACREEDOR. -Es cuando la sumatoria del lado HABER es mayor a la sumatoria del lado del DEBE. Es decir, el saldo acreedor es equivalente al HABER menos el DEBE.

SALDO ACREEDOR= Haber > Debe

Ejemplo:

La empresa ENTEL SRL inicia sus actividades con Bs. 60.000 Bs. 10.000 (T/C 7) Compra una computadora Bs. 6.500.- Muebles y Enseres al contado Bs. 12.200 Sueldos y Salarios Bs. 15.000 Maquinaria y Equipo Bs. 8.000 otros gastos Bs. 2.200.

Caja Moneda Nacional



DEBE	HABER
60.000	6.500
70.000	12.200
	15.000
	8.000
	2.200
130.000	43.900
1.800	

Empresa Modelo S.A. DIARIO GENERAL				
FECHA	DESCRIPCIÓN	REF	DEBE	HABER
28 / 08 / 2020	Caja	1.1.1	3.000,00	20.000,00
	Bancos	1.2.3	15.000,00	
	Equipos de computación	1.2.4	2.000,00	
	a) Capital	3.1.1		
	Para registrar los aportes del señor Cesar Lara, como nuevo socio de la CIA		-------------- 20.000,00	------------- 20.000,00

SALDO DEUDOR = 130.000 > 43.900

Ejemplo:

La empresa Paceñita S.R.L. inicia actividades el 05 de febrero de 2020 con lo siguiente: Caja M/N Bs. 30.000

Muebles y enseres Bs. 3.600

Cuentas por Cobrar Bs 1.000

Cuentas por Pagar Bs 2.100

¿Capital?

Primer paso

Despejar la incógnita.

$$A=P+P^*$$

$$30000+ 3600+1000=2100+P^*?$$

$$P^*=30000+3600+1000-2100$$

$$P^*= 34600-2100$$

$$P^*= 32500$$

El resultado.

Activo	**Pasivo**
Activo	**Obligaciones**
Corriente	
Disponible	Cuentas por pagar 2.100
	Total pasivo
Disponible 30.000	**2.100**
Cuentas por Cobrar 1.000	**Patrimonio**
	CAPITAL
TOTAL ACTIVO	32.500 TOTAL PATRIMONIO
CORRIENTE 31.000	**32.500**

Segundo paso registrar el balance inicial

EMPRESA

PACEÑITAS

NIT:23435353

EL ALTO - BOLIVIA

Empresa Paceñitas SRL

Balance Inicial

AL 5 de febrero de 2020

Expresado en Bolivianos

Activo no corriente

Muebles y Enseres 3.600

Total activo no corriente 3.600

Total pasivo y total activo 34.600

Patrimonio 34.600

CONTADOR GENERAL

REPRESENTANTE LEGAL

Tercer paso

Registrar en el libro diario

EMPRESA. Paceñita S.R.L.

NIT:34234235

LA PAZ-BOLIVIA

Libro diario

Fecha	Detalle	Grupo	Efecto	Debe	Haber
05/02/2015	Caja M/N	A	+	30.000	2.100
	Muebles y Enseres	A	+	3.600	32.500
	Cuentas por Cobrar.	A	+	1.000	
	Cuentas por Pagar	P	+		
	Capital Social.	P*	+	-----------	------------
	GLOSA: Para registrar el inicio de actividades de la empresa paceñita S.R.L.			34.600	34.600

Cuarto paso

EMPRESA. Paceñita S.R.L.

NIT:34234235

LA PAZ-BOLIVIA

Mayores " T".

	CAJA M/N	
CD. 1	30.000	
	30.000	

	CUENTAS POR COBRAR	
CD 1	1000	
	1000	

CAPITAL

CD 1	3.600		
	3.600		
		32.500	CD1
		32.500	

CUENTAS POR PAGAR

	2.100	CD 1
	2.100	

Ejemplo:

La empresa PUNATA S.R.L. inicia actividades el 05 de Enero de 2020 con lo siguiente:

Caja M/N Bs. 20.000

Muebles y enseres Bs. 3.000

Cuentas por Cobrar Bs 1.000

Cuentas por Pagar Bs 2.000

¿Capital?

Primer paso

Despejar la incógnita.

A=P+P*

20.000 + 3.000 + 1.000 = 2.000 + P*?

P*=20.000 + 3.000 + 1.000 - 2.000

P*= 24.000 - 2.000

P*= 220.000

El resultado

Segundo paso registrar el Balance Inicial

EMPRESA PUNATA SRL.

NIT: 23435353

EL ALTO- BOLIVIA

EMPRESA PUNATA SRL

BALANCE DE INICIAL

AL 5 de enero de 2020

Expresado en Bolivianos

ACTIVO		PASIVO	
ACTIVO CORRIENTE		**OBLIGACIONES**	
DISPONIBLE		Cuentas por pagar	2.000
Caja	20.000		
Cuentas por Cobrar	1.000		
TOTAL ACTIVO CORRIENTE	21.000	**TOTAL PASIVO**	2.000
ACTIVO NO CORRIENTE		**PATRIMONIO**	
Muebles y Enseres	3.000	CAPITAL	22.000
TOTAL ACTIVO NO CORRIENTE	300	**TOTAL PATRIMONIO**	22.000
TOTAL ACTIVO	24.000	**TOTAL PASIVO Y PATRIMONIO**	2.400
CONTADOR GENERAL		REPRESENTANTE LEGAL	

Tercer paso

Registrar en el libro diario

EMPRESA. PUNATA S.R.L.

NIT:34234235

LA PAZ-BOLIVIA

Libro diario

Fecha	Detalle	Grupo	Efecto	Debe	Haber
05/02/2015	Caja M/N Muebles y Enseres Cuentas por Cobrar Cuentas por Pagar Capital Social GLOSA: Para registrar el inicio de actividades de la empresa Punata S.R.L.	A A A P P*	+ + + + +	20.000 3.000 1.000 ------------- 24.000	2.000 22.000 ------------ 24.000

SUMAS IGUALES

Cuarto paso

Mayores "T"

CAJA M/N

CD. 1	20.000	
	20.000	

CUENTAS POR COBRAR

CD 1	CD 1	

CAPITAL

	Debe	Haber	
CD 1	3.000		
	3.000		
		32.000	CD1
		32.000	

CUENTAS POR PAGAR

Debe	Haber	
	2.000	CD 1
	2.000	

Ejemplo:

La empresa CASTAÑA S.R.L. inicia actividades el 05 de marzo de 2020 con lo siguiente:

Caja M/N Bs. 40.000

Muebles y enseres Bs. 5000

Cuentas por Cobrar Bs 1000

Cuentas por Pagar Bs 5000

¿Capital?

Primer paso

Despejar la incógnita.

$$A = P + P^*$$

40.000 + 5.000 +1.000 = 5.000 + P*?

P* = 40.000 + 5.000 + 1.000 - 5.000

P*= 46.000 - 5.000

P*= 41.000

El resultado

Segundo paso: registrar el balance inicial

EMPRESA CASTAÑA SRL

NIT: 23435353

PANDO- BOLIVIA

EMPRESA CASTAÑA SRL

BALANCE DE INICIAL

AL 5 de marzo de 2020

Expresado en Bolivianos

ACTIVO		**PASIVO**	
ACTIVO CORRIENTE		**OBLIGACIONES**	
DISPONIBLE		Cuentas por pagar	5.000
Caja	40.000	**TOTAL PASIVO**	5.000
Cuentas por Cobrar	1.000	**PATRIMONIO**	
TOTAL ACTIVO		CAPITAL	41.000
CORRIENTE	41.000	**TOTAL PATRIMONIO**	41.000
ACTIVO NO CORRIENTE			
Muebles y Enseres	5.000		
TOTAL ACTIVO NO CORRIENTE	5.000		
TOTAL ACTIVO	46.000	**TOTAL PASIVO Y PATRIMONIO**	46.000

CONTADOR GENERAL REPRESENTANTE LEGAL

Tercer paso

REGISTRAR EN EL LIBRO DIARIO

EMPRESA. CASTAÑA S.R.L.

NIT:34234235

PANDO-BOLIVIA

Libro diario

FECHA	DETALLE	GRUPO	EFECTO	DEBE	HABER
05/02/2015	Caja M/N Muebles y Enseres	A	+	40.000	5000
	Cuentas por Cobrar	A	+	5000	41000
	Cuentas por Pagar	A	+	1.000	
	Capital Social	P	+		
	GLOSA: Para registrar el	P*	+	------------	----------
	inicio de actividades de			46.000	46.000
	la empresa CASTAÑA				
	S.R.L.				

Cuarto paso

MAYORES."T"

CAJA M/N

CD. 1	40.000	
	40.000	

CUENTAS POR COBRAR

CD 1	1.000	
	1.000	

CAPITAL

CD 1	5.000		
	5.000		

	41.000	CD1
	41.000	CAPITAL

MUEBLES Y ENSERES

	5.000	CD 1
	5.000	

CUENTAS POR PAGAR

3. VALORACIÓN

A continuación, vamos a responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Es importante conocer el concepto de cuenta?¿Por qué?

R ....

....

....

2. ¿Crees que es importante conocer donde se registran las cuentas del Debe y Haber?

R ....

....

....

3. ¿Consideras que es importante calcular el interés simple?

R ....

....

....

4. ¿Qué Empresas Industriales existen en tu departamento o región?

R ....

....

....

5. ¿Dónde consideras que existen empresas comerciales?

R ....

....

....

4. PRODUCCIÓN

Para el participante

El señor **MARIO MARTINEZ** propietario de la ferretería **"TOMATITAS"**, presenta la siguiente información de los bienes y obligaciones que cuenta al 06 de enero del 2019.

Caja M/N	Bs.50.000
Muebles evaluados	Bs.8.000
Cuentas por cobrar	Bs.7.000
Cuentas por pagar	Bs.8.000
Capital.	

Se pide.

Determinar su ecuación de balance, balance de apertura registró en el libro diario y pases al mayor.

Para el participante

El señor **GLADYS CÉSPEDES** propietario de la ferretería **"SERRANITO"**, presenta la siguiente información de los bienes y obligaciones que cuenta al 06 de mayo del 2019.

Caja M/N	Bs.35.000
Muebles evaluados	Bs.9.000
Cuentas por cobrar	Bs.6.000
Cuentas por pagar	Bs.15.000
Capital	

Se pide

Determinar su ecuación de balance, balance de apertura registro en el libro diario y pases al mayor.

Elabora un plan de pagos basado en los años plazo y el interés de los bancos para prevenir préstamos que afecten a la economía familiar.

Elabora una propuesta para poder tener los registros de ingresos y egresos y de esa manera fomentar el control de gastos para prevenir futuras demandas.

BIBLIOGRAFÍA

- *Botschaft del Plurinationalen Staats*. (2021). Obtenido de El Nuevo Modelo Económico, Social, Comunitario y Productivo: http://www.bolivia.de/es/bolivia/economia-y-comercio/
- De la Colina , J. M. (s.f.). *Monografía, el Centro de Tesis, Documentos, Publicaciones y Recursos Educativos.* Obtenido de Resumen de la economía : https://www.monografias.com/trabajos54/resumen-economia/resumen-economia3.shtml
- Editorial Don Bosco Salesianos. (2011). *Matemática*. La Paz: Don Bosco.
- Flores Fernandez , R. (2011). Dossier Sistemas de Información contable . En L. A. Flores, *Ingeniería en sistemas*. La Paz Bolivia.
- Fowler Newton , E. (2019). *Contabilidad básica*. Buenos Aires : 4ta Edición.
- Ministerio de Educación . (2017). *Matemáticas (Guía de trabajo) Aprendizajes Especializados*. En C. F. R.. La Paz .
- Ley 843 - Código de Comercio
- Rodriguez, D. (2015). *Contabilidad.com.do*. Obtenido de Principios de Contabilidad Generalmente Aceptados (PCGA): https://contabilidad.com.do/principios-de-contabilidad-generalmente-aceptados-pcga
- Santillana Secundaria . (2004). *Libro de matemáticas 3 Recursos didácticos*. México.
- Sevilla, A. A. (2015). *Economipedia*. Obtenido de Economía : https://economipedia.com/definiciones/economia.html
- Tolentino , R. (2010). Contabilidad Básica. *Academia*.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN
ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Whatsapp a nivel nacional:
591 - 71550970
591 - 71530671

Correo electrónico
informacion@minedu.gob.bo

@minedubol

@minedu_bol

minedubol

Ministerio de Educación - Oficial

MinEduBol

Av. Arce #2147
Tel. (591-2) 2681200
www.minedu.gob.bo
La Paz - Bolivia