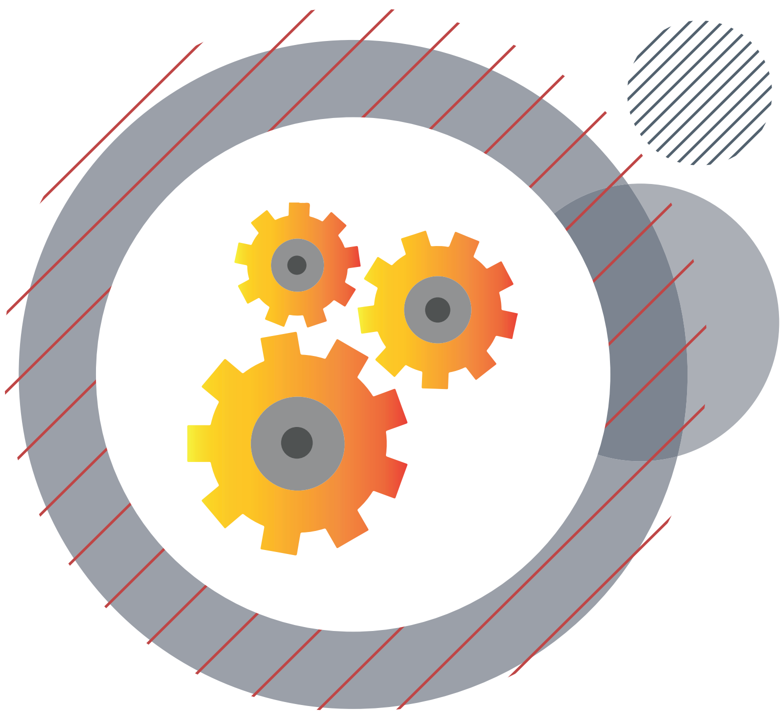
ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

6

SECUNDARIA

TEXTOS DE APRENDIZAJE 2023 - 2024



SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA
ÁREA
MATEMÁTICA

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA
MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Compendio para maestras y maestros - textos de aprendizaje 2023 - 2024
Educación secundaria comunitaria productiva
Documento oficial - 2023

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Bartolomé Puma Velásquez
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR

María Salomé Mamani Quispe
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Equipo de redacción
Dirección General de Educación Secundaria

Coordinación general
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Índice

CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Matemática

Sexto año de secundaria

Presentación

Estimadas maestras y maestros, el fortalecimiento de la calidad educativa es una de nuestras metas comunes que, como Estado y sociedad, nos hemos propuesto impulsar de manera integral para contribuir en la transformación social y el desarrollo de nuestro país. En este sentido, una de las acciones que vienen siendo impulsadas desde la gestión 2021, como política educativa, es la entrega de textos de aprendizaje a las y los estudiantes del Subsistema de Educación Regular, medida que, a partir de esta gestión, acompañamos con recursos de apoyo pedagógico para todas las maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional.

El texto de apoyo pedagógico, que presentamos en esta oportunidad, es una edición especial proveniente de los textos de aprendizaje oficiales. Estos textos, pensados inicialmente para las y los estudiantes, han sido ordenados por Áreas de Saberes y Conocimientos, manteniendo la organización y compaginación original de los textos de aprendizaje. Esta organización y secuencia permitirá a cada maestra y maestro, tener en un mismo texto todos los contenidos del Área, organizados por año de escolaridad, sin perder la referencia de los números de página que las y los estudiantes tienen en sus textos de aprendizaje.

Este recurso de apoyo pedagógico también tiene el propósito de acompañar la implementación del currículo actualizado, recalcando que los contenidos, actividades y orientaciones que se describen en este texto de apoyo, pueden ser complementados y fortalecidos con la experiencia de cada maestra y maestro, además de otras fuentes de consulta que aporten en la formación de las y los estudiantes.

Esperamos que esta versión de los textos de aprendizaje, organizados por área, sea un aporte a la labor docente.

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

CONOCE TU TEXTO

En la organización de los contenidos encontraremos la siguiente iconografía:

Glosario

Glosario

Aprendemos palabras y expresiones poco comunes y difíciles de comprender, dando uno o más significados y ejemplos. Su finalidad radica en que la o el lector comprenda algunos términos usados en la lectura del texto, además de ampliar el léxico.

Investiga

Somos invitados a profundizar o ampliar un contenido a partir de la exploración de definiciones, conceptos, teorías u otros, además de clasificar y caracterizar el objeto de investigación, a través de fuentes primarias y secundarias. Su objetivo es generar conocimiento en las diferentes áreas, promoviendo habilidades de investigación.

Investiga

¿Sabías que...?

¿Sabías que...?

Nos muestra información novedosa, relevante e interesante, sobre aspectos relacionados al contenido a través de la curiosidad, fomentando el desarrollo de nuestras habilidades investigativas y de apropiación de contenidos. Tiene el propósito de promover la investigación por cuenta propia.

Noticiencia

Nos permite conocer información actual, veraz y relevante sobre acontecimientos relacionados con las ciencias exactas como la Física, Química, Matemática, Biología, Ciencias Naturales y Técnica Tecnológica General. Tiene la finalidad de acercarnos a la lectura de noticias, artículos, ensayos e investigaciones de carácter científico y tecnológico.

Noticiencia

Escanea el QR

Para ampliar el contenido

Es un QR que nos invita a conocer temáticas complementarias a los contenidos desarrollados, puedes encontrar videos, audios, imágenes y otros. Corresponde a maestras y maestros motivar al estudio del contenido vinculado al QR; de lo contrario, debe explicar y profundizar el tema a fin de no omitir tal contenido.

Aprende haciendo

Nos invita a realizar actividades de experimentación, experiencia y contacto con el entorno social en el que nos desenvolvemos, desde el aula, casa u otro espacio, en las diferentes áreas de saberes y conocimientos. Su objetivo es consolidar la información desarrollada a través de acciones prácticas.

Aprende haciendo

Desafío

Desafío

Nos motiva a realizar actividades mediante habilidades y estrategias propias, bajo consignas concretas y precisas. Su objetivo es fomentar la autonomía y la disciplina personal.

Realicemos el taller práctico para el fortalecimiento de la lecto escritura.

¡Taller de Ortografía!

¡Taller de Caligrafía!

¡Razonamiento Verbal!

6 SECUNDARIA

ÁREA
MATEMÁTICA

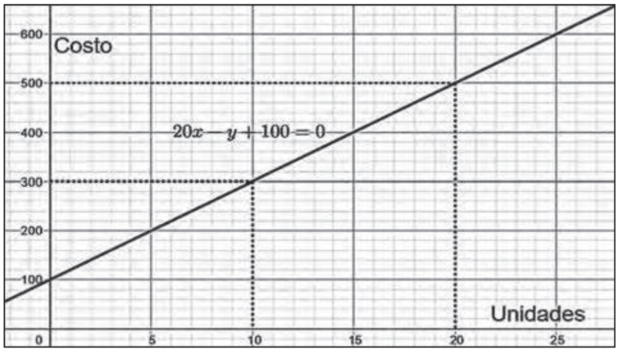
LA LÍNEA RECTA APLICADA A PROCESOS PRODUCTIVOS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Lee atentamente la siguiente historia:

Rodrigo necesita saber si el costo de la producción de chompas puede expresarse a través de un modelo matemático que le ayude en su trabajo diario, para lo cometido, solicita a su hija que cursa el 6to. de secundaria a expresarlo matematicamente de manera exacta.

El costo de fabricar 10 unidades de chompas de lana para el invierno tiene un costo de Bs 300, mientras que el costo de fabricar 20 unidades de chompas polares tendría un valor de Bs 500.



Actividad 1. Respondemos las siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Cuál es el modelo matemático de costo lineal que ayude a Rodrigo, conocer el costo de producción?

2. Si el eje de la “y” representa los costos y el eje de las “x” a la cantidad de productos vendidos, ¿cómo obtenemos una ecuación que represente el costo de producción a gran escala?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición y antecedentes

Comenzaremos en este capítulo con el estudio detallado de la línea recta, debido a que su ecuación es la más simple. Nuestra finalidad inmediata es poder escribir la ecuación de una recta, para este fin, el concepto de pendientes es fundamental, pues si de los puntos de una recta se elige un conjunto de puntos, podemos esperar que las coordenadas asignadas a estos puntos nos indiquen por medio de pendientes, que son colineales. Esta propiedad permite definir a una recta como un lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta constante.

En el año 1637 el filósofo y matemático francés René Descartes, en su libro: “El discurso del método”, realizó una conexión entre la geometría y el álgebra, fue el primero en demostrar las relaciones entre las líneas rectas y las curvas, fue así como nació la geometría analítica que se define como la rama de la geometría que representa curvas y figuras mediante expresiones algebraicas en un sistema de coordenadas cartesianas.

Noticiencia

Es el año 1637 y se publica en Leiden (Holanda) un texto que se convertiría en uno de los libros fundacionales de la filosofía: *Discurso del método. Es un libro raro. Para empezar, no está firmado, y eso que tiene un marcado punto autobiográfico.* ***René Descartes.***

2. Ecuaciones de la recta

Las rectas que tienen cualquier propiedad geométrica especial, se pueden asociar con ecuaciones que tienen algunas propiedades algebraicas especiales. Si una recta es paralela al eje Y, su abscisa es constante y la ecuación tiene la forma: $L_1 = \{(x\,;\,y) / x = a\}$. Donde a da la distancia y la dirección desde el eje Y.

En la Figura 1 obsérvamos que cuando $\alpha = 0$, la recta L_1 coincide con el eje Y, esto es, la ecuación del eje Y es x = 0. Si una recta es paralela al eje X, su ordenada es constante y su ecuación tiene la forma:

$L_2 = \{(x, y) / y = b\}$. Donde b da la distancia y dirección desde el eje X. Cuando b = 0, la recta L_2 coincide el eje X, esto es, la ecuación del eje X es y = 0.

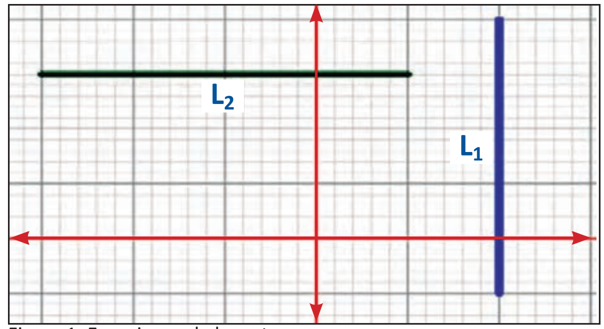


Figura 1: Ecuaciones de la recta

2.1. Ecuación punto pendiente

La ecuación de la recta punto pendiente se aplica cuando se conoce un punto y la pendiente.

Teorema 1. La ecuación punto – pendiente.

La ecuación de una recta no vertical L que pasa por el punto fijo $P_1 (x_1; y_1)$ y de pendiente dada m, es:

$y - y_1 = m (x - x_1)$ Demostración. Figura 2

a) Sea P (x; y), un punto cualquiera del lugar geométrico, diferente del punto fijo $P_1 (x_1;y_1)$.
b) Por definición de recta, para cualquier posición de P.
c) Se debe verificar que: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

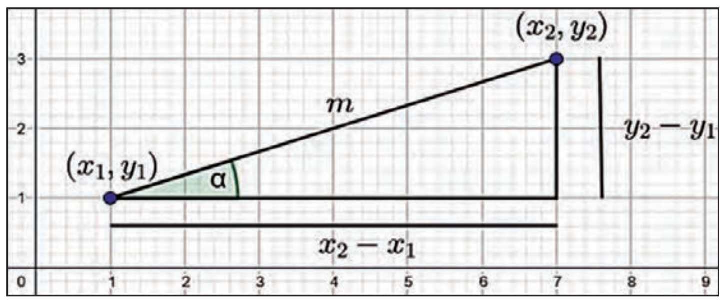


Figura 2: Ecuación punto-pendiente

d) De donde obtenemos: $y_2 - y_1 = m (x_2 - x_1)$

Ejemplo 1. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta conociendo su pendiente m = 3 y pasa por el punto P(3; 2).

Apliquemos la siguiente ecuación punto pendiente y reemplazamos los datos respectivos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - 2 = 3 \cdot (x - 3)$$
$$y = 3x - 9 + 2$$
$$y = 3x - 7$$
$$y = 3x - 7$$
$$L: 3x - y - 7 = 0$$

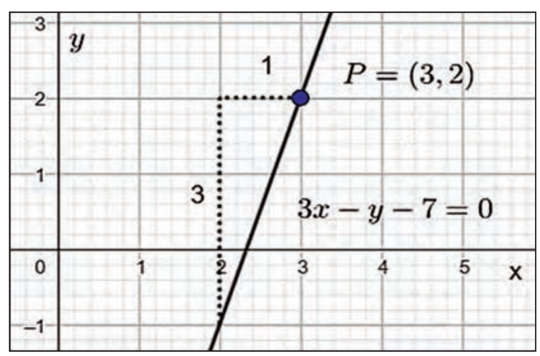


Figura 3: Ejemplo 1

Ejemplo 2. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta conociendo su pendiente m = 2 y pasa por el punto P(1; -5).

Apliquemos la ecuación punto -pendiente y reemplazamos los datos respectivos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - (-5) = 2 \cdot (x - 1)$$
$$y + 5 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 2 - 5$$
$$y = 2x - 7$$
$$0 = 2x - 7 - y$$
$$\therefore\ L: 2x - y - 7 = 0$$

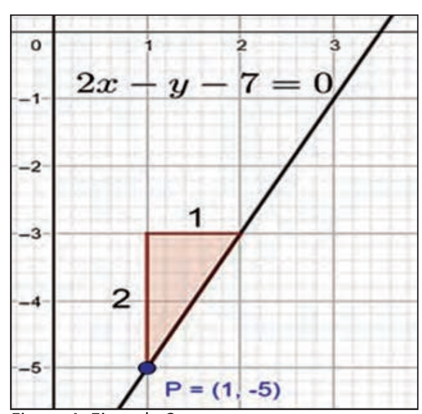


Figura 4: Ejemplo 2

Ejemplo 3. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta conociendo su pendiente m = 2/3 y pasa por el punto P(-3;-2).

Apliquemos la siguiente ecuación punto pendiente y reemplazamos los datos respectivos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - (-2) = \tfrac{3}{2} \cdot [x - (-3)]$$
$$y + 2 = \tfrac{3}{2}(x + 3)$$
$$y + 2 = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{2}$$
$$y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{2} - 2$$

$$y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{2}$$
$$0 = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{2} - y$$
$$\tfrac{3}{2}x - y + \tfrac{5}{2} = 0 \ //* 2$$
$$L\!: \ 3x - 2y + 5 = 0$$

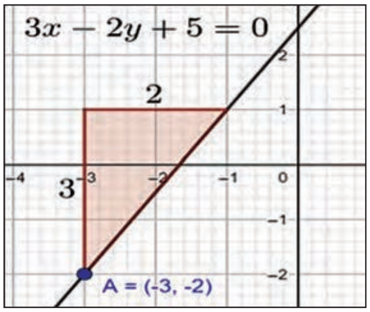


Figura 5: Ejemplo 3

Actividad 2. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta de pendiente $m = 4$ y pasa por el punto $(1; -2)$
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta de pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $\left(-\frac{2}{3}; -4\right)$
3) Calculemos la ecuación de la recta, si su pendiente $m = \sqrt{2}$ y pasa por el punto $A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Grafiquemos con el software Geogebra (opcional).

2.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

O también llamada ecuación cartesiana de la recta, es una ecuación útil cuando la recta pasa por dos puntos.

Para realiza la gráfica, ubicamos los dos puntos en el plano cartesiano y trazamos una recta que pase por estos puntos. Es así que podemos tener la gráfica de la recta en el plano cartesiano.

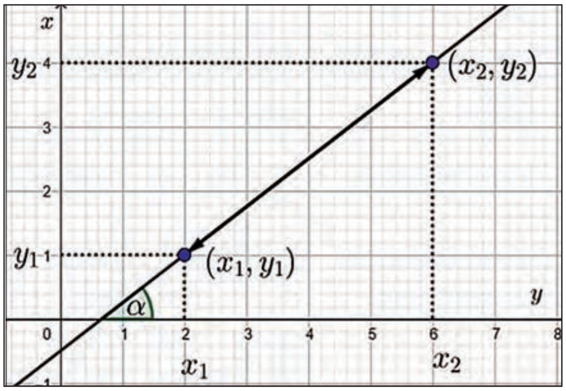


Figura 6: punto- punto

Teorema 2. La ecuación punto punto es la recta que pasa por dos puntos fijos $P_1 (x_1; y_1)$ y $P_2 (x_2; y_2)$ tiene por ecuación:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \qquad x_1 \neq x_2$$

Ejemplo 4. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta, si se conocen los siguientes puntos: A(0; 1) y B(3; 2).

Aplicamos la siguiente ecuación punto punto y reemplazamos los datos respectivos:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{2-1}{3-0}$$
$$\frac{y-1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \tfrac{1}{3}x$$
$$y = \tfrac{1}{3}x + 1$$
$$0 = \tfrac{1}{3}x + 1 - y$$
$$\tfrac{1}{3}x - y + 1 = 0 \ //* 3$$
$$L\!: \ x - 3y + 3 = 0$$

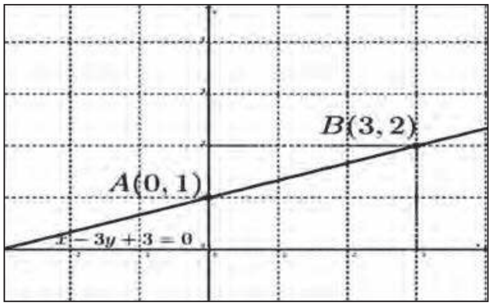


Figura 7: Ejemplo 4

Ejemplo 5. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta, si se conocen los siguientes puntos: C(4 ; 3) y D(2 ; 5)

Apliquemos la ecuación punto punto y reemplazamos los datos respectivos:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-3}{x-4} = \frac{5-3}{2-4}$$
$$\frac{y-3}{x-4} = \frac{2}{-2}$$

$$\frac{y-3}{x-4} = -1$$
$$y - 3 = -1(x - 4)$$
$$y = -x + 4 + 3$$
$$y = -x + 7$$
$$\therefore \ L\!: \ x + y - 7 = 0$$

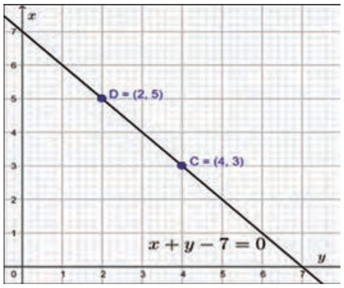


Figura 7: Ejemplo 4

Ejemplo 6. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta, si se conocen los siguientes puntos: A(2 ; 1) y B(- 5; - 3)

Aplicamos la ecuación punto punto y reemplazamos los datos respectivos

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-3-1}{-5-2}$$

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-4}{-7}$$

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{4}{7}$$

$$y-1=\frac{4}{7}(x-2)$$

$$y=\frac{4}{7}x-\frac{8}{7}+1$$

$$y=\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}$$

$$0=\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}-y$$

$$\frac{4}{7}x-y-\frac{1}{7}=0\ //*7$$

$$L\colon\ 4x-7y-1=0$$

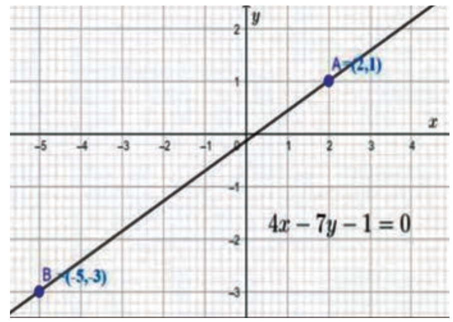


Figura 9: Ejemplo 6

Actividad 3. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(1;2)$ y $B(3;4).2)$
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A\left(-\frac{1}{2};-2\right)$ y $B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$
3) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Ecuación de la recta ordenada en el origen y pendiente

Teorema 3. La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b, tiene por ecuación: y = mx + b

m es la pendiente

b es la ordenada en el origen

Entonces teniendo el $P_1(0;b)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-b=m(x-0)$$

$$y-b=mx$$

$$y=mx+b$$

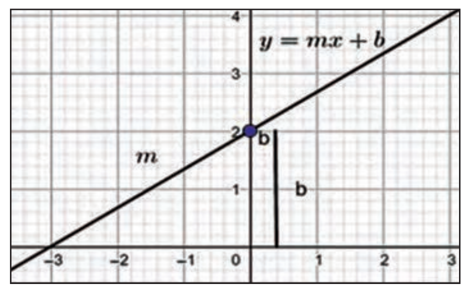


Figura 10: ordenada en el origen

Ejemplo 7. Grafiquemos y calculemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = 2 y la ordenada en el origen b = 2

Aplicamos la siguiente ecuación pendiente ordenada en el origen y reemplazamos los datos respectivos:

$$y=mx+b$$

$$y=2x+2$$

$$y=2x+2$$

$$0=2x+2-y$$

$$\therefore L:\ 2x-y+2=0$$

Esta ecuación es fácil para graficar la línea recta, de la siguiente forma:
Ubicar la ordenada en el origen.
A partir de este punto, determinar el recorrido de la pendiente, m=$\frac{\Delta y}{\Delta x}$,
el cociente del cambio de "y" y "x"

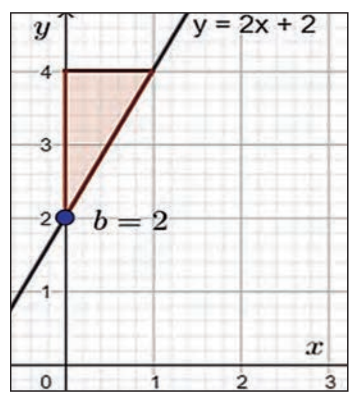


Figura 11: Ejemplo 7

Actividad 4. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = 7 y ordenada en el origen 14.
2. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = -3 y ordenada en el origen -5.
3. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = -1/2 y ordenada en el origen 3/4.

2.3. Ecuación de la recta abscisa y ordenada en el origen

Teorema 4. La recta cuyas intersecciones con los ejes X e Y son a ≠ 0 y b ≠ 0, respectivamente, tiene por ecuación:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Donde: a es la abscisa y b la ordenada ambas en el origen, es decir que "a" y "b" se encuentran sobre el eje "x" y eje "y" respectivamente.
En la ecuación:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Remplazamos los puntos P_1 (0;b) y P_2 (a;0)

$$\frac{y-b}{x}=\frac{-b}{a}$$

$$a(y-b)=-bx$$

$$ay-ab=-bx$$

$$bx+ay=ab$$

Dividir ambos miembros entre ab:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

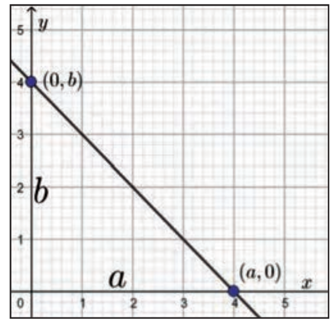


Figura 12: abscisa y ordenada en el origen

Ejemplo 8: Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: A(1;0) y B(0;-3)

Reemplazamos los valores tenemos:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-3}=1$$

$$x-\frac{y}{3}=1 \quad //*3$$

$$3x-y=3$$

$$\therefore L:\ 3x-y-3=0$$

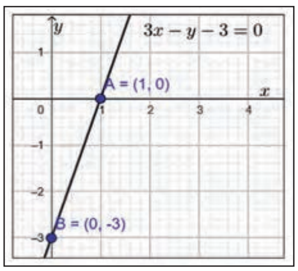


Figura 13: Ejemplo 8

Actividad 5

1) Calcula y grafica la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen suman 9 y cuya pendiente es $-\frac{4}{3}$.
2) Calcula y grafica la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen suman 5, y cuya pendiente es $\frac{7}{5}$.

2.4. Forma general de la ecuación de una recta

Una ecuación de primer grado es un conjunto infinito de puntos colineales en el plano cartesiano. De la ecuación general se determinará los elementos de recta, la pendiente y la ordenada en el origen. $\boldsymbol{Ax+By+C=0}$

Despejando $\boldsymbol{y}$ para tener la ecuación en su primera forma tendremos: $\boldsymbol{y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}}$.

Donde podemos determinar la pendiente y la ordenada en el origen, comparando con la ecuación $\boldsymbol{y=mx+b}$, entonces se tiene: $\boldsymbol{m=-\frac{A}{B}}$; $\boldsymbol{b=-\frac{C}{B}}$

Ejemplo 9. Determinamos la pendiente y ordenada en el origen de la recta: $3x+4y-12=0$

$$3x+4y-12=0$$

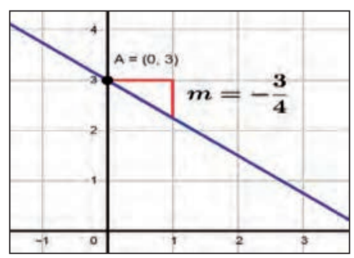
$$Ax+By+C=0$$

Identificando los coeficientes:

$$\underbrace{3}_{A}x+\underbrace{4}_{B}y\underbrace{-12}_{C}=0,\text{luego:}$$

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}=-0{,}75$$

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{-12}{4}=3$$



2.5. Forma normal de la ecuación de la recta

Tenemos la ecuación de la recta en su forma normal, la misma que se dio con los datos de la imagen y su reducción de la forma general.

L: xcosα + ysenα = p

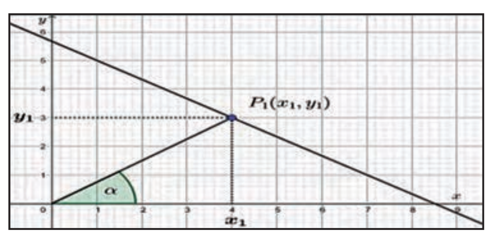


Figura 15: Formal normal

3. Aplicaciones de la forma normal

Ejemplo 10. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta a 4 unidades del origen, si su normal tiene un ángulo de inclinación de 120°. L: xcosα + ysenα - p = 0

$$Como: p=4 \ \ y \ \ w=120^{\circ}$$

$$x\cos 120^{\circ}+y\,\mathrm{sen}\,120^{\circ}-4=0$$

$$x\left(-\frac{1}{2}\right)+y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-4=0 \quad //(-2)$$

$$L: x-\sqrt{3}\,y+8=0$$

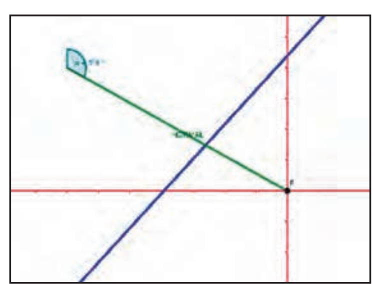


Figura 16: Ejemplo 10

Actividad 6. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta $p = 3\sqrt{2}$, unidades del origen si su normal tiene un ángulo de inclinación de 315^0.
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta $p = 9$, unidades del origen si su normal tiene un ángulo de inclinación de 45^0.

4. Distancia de un punto a una recta

La distancia más corta entre la recta y un punto en el plano, es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado a partir del punto.

La distancia del punto $P(x_1; y_1)$ a la recta.$L: Ax_1 + By_1 + C = 0$ está determinado por la fórmula: $d = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

El valor absoluto garantiza que la distancia sea positiva.

Ejemplo 11. Determinamos y graficamos la distancia del punto $A(6;\ 5)$, a la recta L: $7x + 4y = 17$.

Expresamos la ecuación $7x + 4y = 17$ en la forma $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Así $\underbrace{7}_{A}x + \underbrace{4}_{B}y\underbrace{-17}_{C} = 0$ donde $A = 7,\quad B = 4$ y $C = -17$

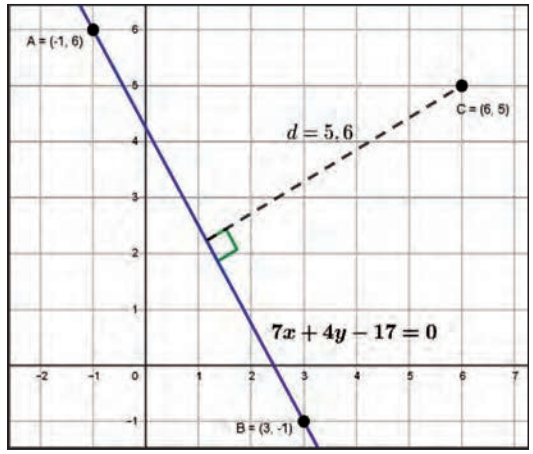


Figura 17: Ejemplo 11

Remplazando en la ecuación de distancia de un punto a una recta:

$$d = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{7(6)+4(5)+(-17)}{\sqrt{7^2+4^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{45}{\sqrt{65}}\right| = |5{,}6| = 5{,}6\ \textbf{\textit{unidades}}$$

Actividad 7. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la distancia dirigida que separa al punto P_1 (-2; - 3), de la recta cuya pendiente es – 2/3, y que pasa por A (1; 0).
2) Calculemos los valores de k para que la recta L: 2x + 3y – k = 0 y el punto P (- 2; - 3), disten 4 unidades.

5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

La línea recta en la vida cotidiana se puede observar en los objetos, figuras con lados rectos o planos. De igual manera, la recta más determinante es el horizonte o vista horizontal que refleja una recta entre dos paisajes. Analicemos las siguientes preguntas y encontramos su respuesta aplicando ecuaciones de la linea recta:

1) ¿Cuántos árboles existían en Santa Cruz de la Sierra el año 2017?
2) ¿Al ritmo que vamos en la tala de árboles en el departamento de Santa Cruz, en qué año ya no se tendrá árboles?
3) ¿Cada año cuántos árboles pierde el departamento de Santa Cruz?
4) ¿Qué ecuaciones de la línea recta ocuparemos para representar esta problemática?

Respuestas:

200000 árboles
2017 +100 = 2117
El año 2117

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$P_1(0; 200000\ árboles)$
$P_2(100\ años; 0)$

$m = \frac{0-200000}{100-0} = \frac{-200000}{100}$

$m = -\frac{2000\ árboles}{1\ años}$

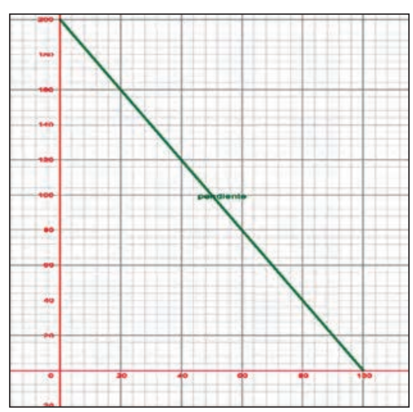
$\therefore$ *El departamento de Santa Cruz cada año pierde 2000 árboles*

d) $m = -2000$
$P_1(0; 200000\ árboles)$
<u>punto – pendiente</u>

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 200000 = -2000(x - 0)$
$y - 200000 = -2000x$
$\therefore L: 2000x + y - 200000 = 0$

$\underline{modelo\ matemático}$
$\underline{como\ aplicación\ tecnológica}$
$y = -2000x + 200000$
<u>Donde</u>
$y = árboles$ y
$x = tiempos\ (años)$

$a = -2000\,t + 200000$



La gráfica representa un reporte sobre la tala indiscriminada de árboles en el departamento de Santa Cruz.

En el informe de la ABT, también resalta que en el departamento donde más se deforestó fue Santa Cruz con 91.369 hectáreas, seguido por Beni, con 8.437 y La Paz 4.032; la mayor parte de las tierras afectadas se destina a la ganadería y a la actividad forestal y minera.

Bolivia, 06 de Marzo 2017
Fuente: El Diario Noticias

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 8. Reflexionemos y analicemos, para responder las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo se aplica las propiedades de la recta en proyecciones financieras que favorezcan los emprendimientos productivos?
2) ¿Por qué es importante conocer y aprender la ecuación de la recta para su aplicación en modelos matemáticos?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 9. Realicemos las siguientes actividades:

1) Solicitamos permiso al Director/a de la Unidad Educativa para pintar las líneas laterales, centrales y de fondo de la cancha de básquet.
2) Con la ayuda de los compañeros realizamos las operaciones para calcular las ecuaciones de todas las rectas.
3) Para ello consideramos como origen del plano cartesiano el centro de la cancha.

LA CIRCUNFERENCIA Y LOS SABERES CULTURALES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

En tu comunidad o barrio donde vives, observa e identifica objetos o figuras que representan a la circunferencia.
Por ejemplo, el aro del tablero de baloncesto y el centro de campo de la cancha de fútbol de salón tienen la forma de circunferencia.

Actividad 10. Respondemos la siguiente pregunta en el cuaderno:
¿Qué características en común tienen esas figuras u objetos?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano cuyas distancias (no dirigidas), a un punto fijo son iguales (distancia constante). El punto fijo se llama centro y la distancia constante no dirigida es el radio.

2. Elementos de la circunferencia

Centro de la circunferencia	C
Radio de la circunferencia	CD
Diámetro de la circunferencia	AB
Cuerda de la circunferencia	FG
Recta tangente a la circunferencia	L_T
Recta normal a la circunferencia	L_N

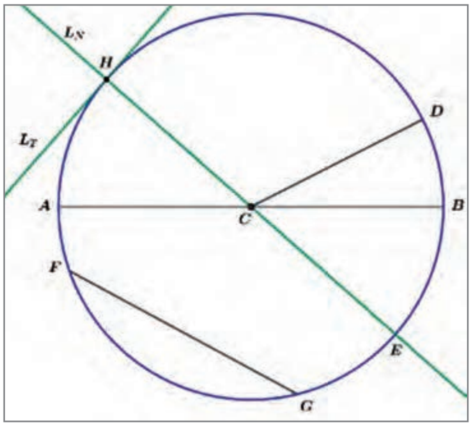


Figura 1: Elementos de la circunferencia

3. Ecuaciones de la circunferencia

3.1. Ecuación canónica

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas rectangulares, entonces la ecuación de la circunferencia queda reducida a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La cual se denomina **ecuación canónica** de la circunferencia.

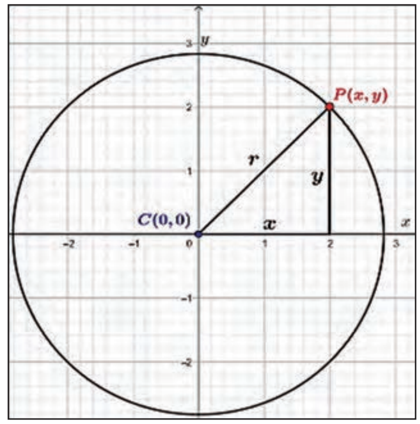


Figura 2: Ecuación canónica

Ejemplo 1. Determinamos y graficamos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 5

Aplicamos la siguiente ecuación y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$$

$\therefore$ *la ecuación canónica es*:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 25}$$

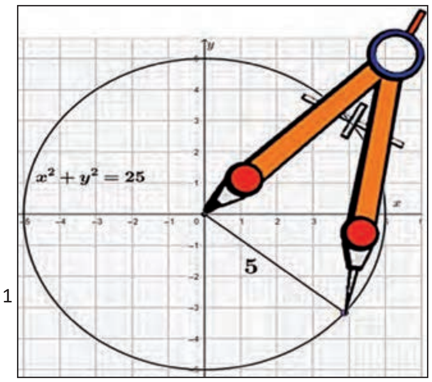


Figura 3: Ejemplo 1

Actividad 11. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 4 .
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 6 .
3) Calculemos y grafiquemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 7 .

3.2. Ecuación ordinaria de la circunferencia

La circunferencia cuyo centro es el punto C (h; k) y cuyo radio es la constante r > 0, es la gráfica de la ecuación.

$$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Que recibe el nombre de forma ordinaria o reducida de la ecuación de la circunferencia.

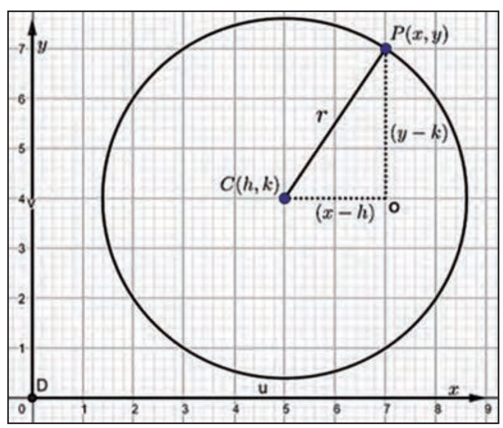


Figura 4: Ecuación ordinaria

Ejemplo 2. Determinamos y graficamos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(-3;-5) y radio r = 7

Aplicamos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$[x-(-3)]^2 + [y-(-5)]^2 = 7^2$$

$\therefore$ *la ecuación ordinaria o reducida es*:

$$\boldsymbol{(x+3)^2 + (y+5)^2 = 49}$$

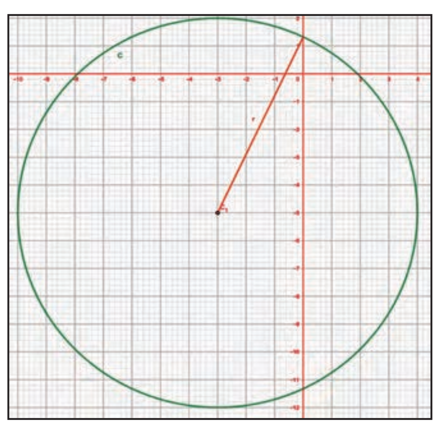


Figura 5: Ejemplo 2

Actividad 12. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Calculemos y grafiquemos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(-2; -3) y radio r = 4
2. Calculemos y grafiquemos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(2; 3) y radio r = 5
3. Calculemos y grafiquemos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(-1; 4) y radio r = 6

3.3. Ecuación general de la circunferencia

Se obtiene al desarrollar los cuadrados de la ecuación ordinaria e igualar a cero. $\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Se tiene la siguiente relación: $h = -\frac{D}{2}$; $k = -\frac{E}{2}$; $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

Vemos que tiene la forma de la ecuación y podemos afirmar que:

a) Si *r>0,* la gráfica es una circunferencia de centro $C\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ y radio $\sqrt{r}$.

b) Si r = 0, la gráfica es punto $\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$.

c) Si r<*0,* la gráfica de es el conjunto vacío o representa un círculo imaginario (no representa un lugar geométrico).

Ejemplo 3. Determinamos y graficamos la ecuación general de la circunferencia de centro C(3;-1) y radio r = 4

Aplicamos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 - 16 = 0$$
$$\therefore \varepsilon: \boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0}$$

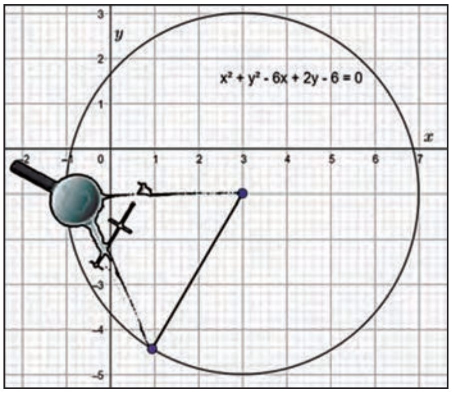


Figura 6: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Determinamos la ecuación dada si es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.
Si lo es graficaremos y hallaremos su centro y su radio.

$$a)\ \boldsymbol{x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{17}{8} = 0}$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - \frac{5}{2}y + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2\right] = -\frac{17}{8} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right] + \left[y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right] = -\frac{17}{8} + \frac{9}{16} + \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + \left(y - \frac{5}{4}\right)\left(y - \frac{5}{4}\right) = \frac{34}{16} - \frac{17}{8}$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 0 \therefore \boldsymbol{es\ un\ punto}$$

Actividad 13. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Determinamos y gráficamos la ecuación general de la circunferencia de centro C(-2; -3) y radio r = 3

2) Determinamos la ecuación dada si es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío. Si lo es gráfica y halla su centro y su radio.
a) $4x^2+4y^2-12x+8y+77=0$
b) $x^2+y^2-4x+14y+37=0$
c) $x^2+y^2-8x+6y+29=0$
d) $9x^2+9y^2-144x+12y+580=0$

4. Circunferencia que pasa por tres puntos

La ecuación de una circunferencia puede ser determinada a partir de tres puntos ubicados en la circunferencia.
Se tiene los puntos $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ y $C(x_3; y_3)$.
Consideramos la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Reemplazamos los puntos A,B y C en la ecuación Así:

$$x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \qquad (1)$$
$$x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \qquad (2)$$
$$x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \qquad (3)$$

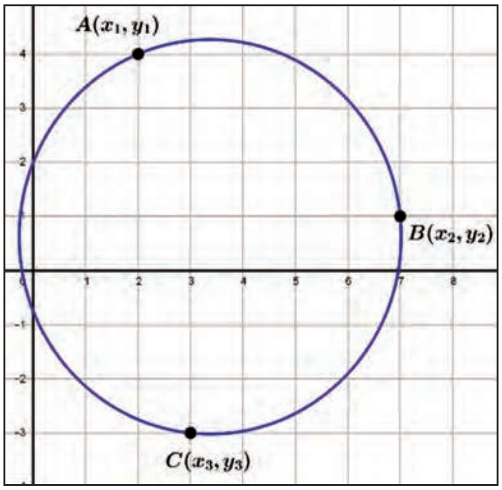


Figura 7: Circunferencia por tres puntos

Ejemplo 5. Determinemos y grafiquemos la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos: A (5; 4), B (4; - 3) y C (- 2; 5).

Datos: Sea la circunferencia

$\varepsilon: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *Si:*

$A(5;4) \rightarrow \quad 5^2 + 4^2 + 5D + 4E + F = 0$

$5D + 4E + F = -41$

$B(4;-3) \rightarrow 4^2 + (-3)^2 + 4D - 3E + F = 0$

$4D - 3E + F = -25$

$C(-2;5) \rightarrow (-2)^2 + 5^2 - 2D + 5E + F = 0$

$-2D + 5E + F = -29$

$$\begin{cases} 5D + 4E + F = -41 & ❶ \\ 4D - 3E + F = -25 & ❷ \\ -2D + 5E + F = -29 & ❸ \end{cases}$$

(-1) ① y ② ② y (-1) ③

$$\begin{cases} -5D - 4E - \cancel{F} = +41 \\ 4D - 3E + \cancel{F} = -25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4D - 3E + \cancel{F} = -25 \\ 2D - 5E - \cancel{F} = +29 \end{cases}$$

$-D - 7E \quad = 16 \qquad 6D - 8E \quad = 4$

$(\times 3)$ ④ y $(\div 2)$ ⑤

$$\begin{cases} -\cancel{3D} - 21E = 48 \\ \cancel{3D} - \quad 4E = 2 \end{cases}$$

$-25E = 50$

$E = -\frac{50}{25}$

$E = -2$

Sustituimos E en 5

$3D - 4E = 2$

$3D - 4(-2) = 2$

$3D + 8 = 2$

$3D = 2 - 8$

$3D = -6$

$D = -2$

Sustituimos E, D y F encontradas en la ecuación general

$\boldsymbol{\varepsilon: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0}$ *Completando cuadrados:*

$$\left[x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - 2y + \left(\frac{-2}{2}\right)^2\right] = 23 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$$

$$[x^2 - 2x + 1] + [y^2 - 2y + 1] = 23 + 1 + 1$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$C(1;1) \quad r = 5$

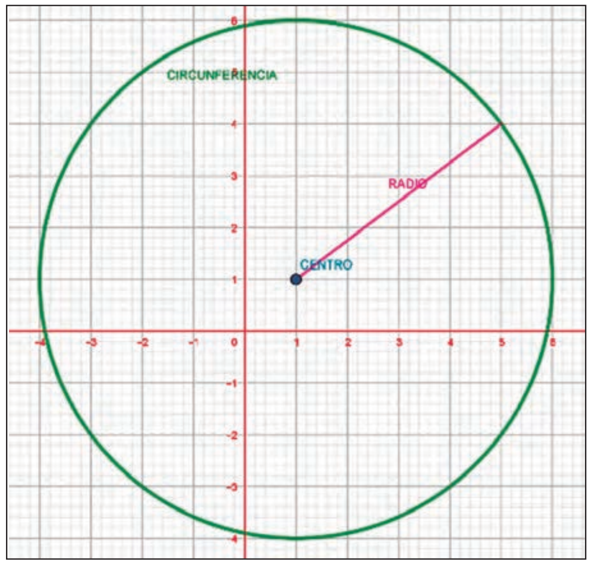


Figura 8: Ejemplo 5

Actividad 14. Determinemos y grafiquemos la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos: A (-1; 1), B (3; 5) y C (5; -3).

5. Familia de circunferencias

Se ha señalado que hay tres constantes esenciales en la ecuación de una circunferencia; por tanto, si se dan condiciones que determinan dos de ellas, la tercera puede elegirse arbitrariamente. Por consiguiente, tenemos un sistema en el que aparece una constante arbitraria de que disponemos corresponde una circunferencia.

$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-k)^2 = t^2$

$t = (\textit{números positivos})$

$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-t)^2 = r^2$

$t = (\textit{números reales})$

$\varepsilon: (x-t)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$t = (\textit{números reales})$

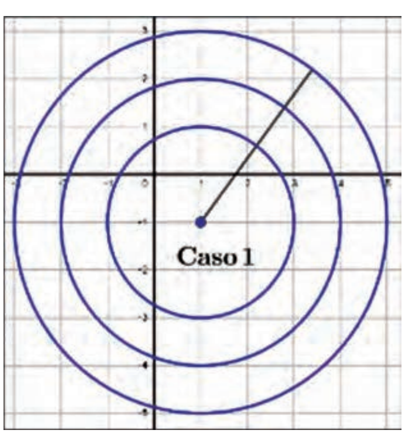
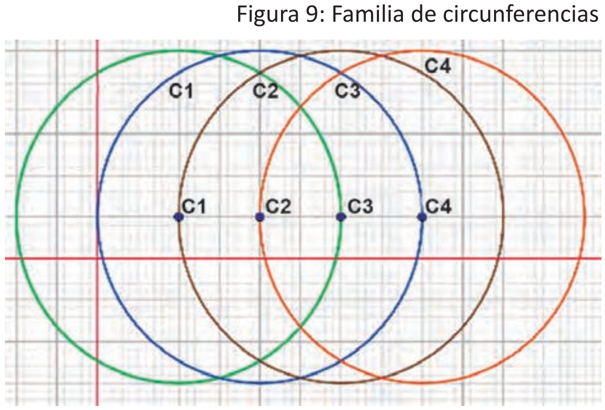
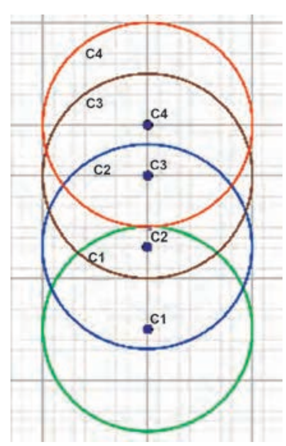


Figura 9: Familia de circunferencias





Ejemplo 6. Determinemos y grafiquemos la ecuación de la familia de circunferencia con centro C(3; -1) y radio r = 4

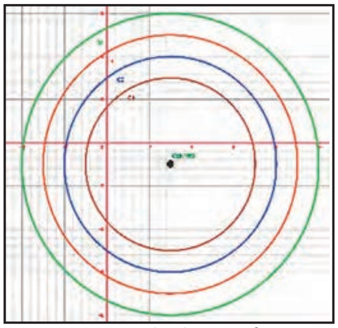


Figura 10: Familia de circunferencias

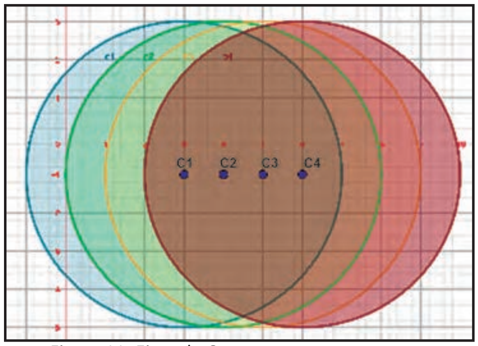


Figura 11: Ejemplo 6

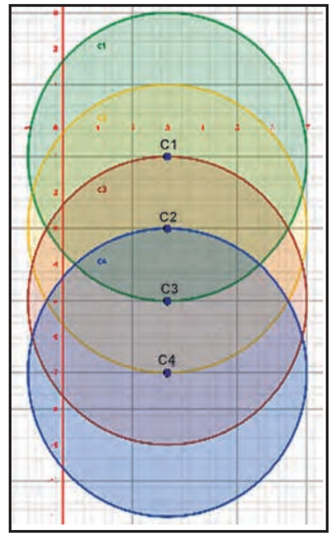


Figura 12: Familia de circunferencias

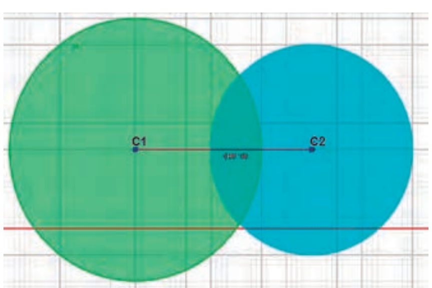
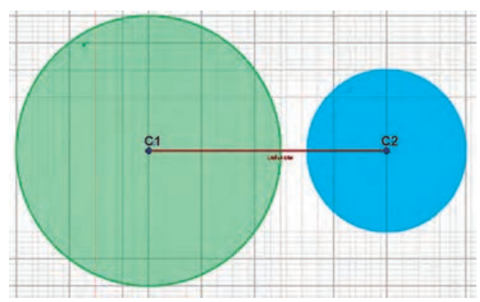
Aplicamos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

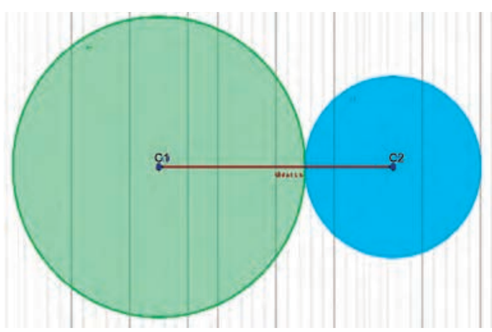
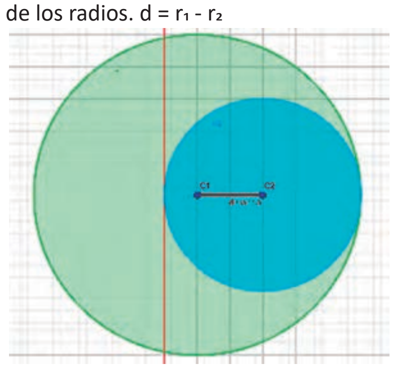
$\varepsilon: (x-h)^2+(y-k)^2=t^2$	$\varepsilon: (x-t)^2+(y-k)^2=r^2$	$\varepsilon: (x-h)^2+(y-t)^2=r^2$
$\varepsilon: (x-3)^2+(y+1)^2=4^2$	$\varepsilon: (x-3)^2+(y+1)^2=4^2$	$\varepsilon: (x-3)^2+(y+1)^2=4^2$
$\varepsilon: (x-3)^2+(y+1)^2=5^2$	$\varepsilon: (x-4)^2+(y+1)^2=4^2$	$\varepsilon: (x-3)^2+(y+3)^2=4^2$
$\varepsilon: (x-3)^2+(y+1)^2=6^2$	$\varepsilon: (x-5)^2+(y+1)^2=4^2$	$\varepsilon: (x-3)^2+(y+5)^2=4^2$
$\varepsilon: (x-3)^2+(y+1)^2=7^2$	$\varepsilon: (x-6)^2+(y+1)^2=4^2$	$\varepsilon: (x-3)^2+(y+7)^2=4^2$
$\varepsilon: (x-3)^2+(y+1)^2=\cdots$	$\varepsilon: (x-\cdots)^2+(y+1)^2=4^2$	$\varepsilon: (x-3)^2+(y+\cdots)^2=4^2$

Actividad 15. Determinemos y grafiquemos la ecuación de la familia de circunferencia con centro C(-2; -3) y radio r = 3.

6. Eje radial entre circunferencias

Es el lugar geométrico de los puntos de igual potencia con relación a dos circunferencias L_1 y L_2; o bien, es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se pueden trazar tangentes iguales a dos circunferencias del sistema.

Circunferencia secantes	Circunferencia exteriores
El eje radical pasa por los puntos de intersección de L_1 y L_2 y ocurre que la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios. $d < r_1 + r_2$ 	El eje radical pasa por los puntos de intersección de L_1 y L_2 y ocurre que la distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios. $d > r_1 + r_2$ 

Circunferencias tangentes exteriores	Circunferencias tangentes interiores
El eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y ocurre que la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios. $d = r_1 + r_2$ 	El eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y ocurre que la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios. $d = r_1 - r_2$ 

Ejemplo 7. Determinemos y grafiquemos la naturaleza de la familia de circunferencia. $x^2+y^2-2x-6y-6+k(x^2+y^2+4x-6y+9)=0$

Datos

$$x^2-2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2+y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2=6+\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$[x^2-2x+1][y^2-6y+9]=6+1+9$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=16$$

$C\,(1;3)\qquad r=4$

$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2+y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2=-9$$

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9=-9+4+9$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4$$

$C\,(-2;3)\qquad r=2$

$C_1(1;3)\quad d_{\overline{C_1C_2}}=\sqrt{(-2-1)^2+(3-3)^2}$

$C_2(-2;3)\quad d_{\overline{C_1C_2}}=\sqrt{9}\qquad d_{\overline{C_1C_2}}=3$

$3<4+2$ V

$3>4+2$ F

$3=4+2$ F

$3=4-2$ F

$\therefore$ Son circunferencias secantes

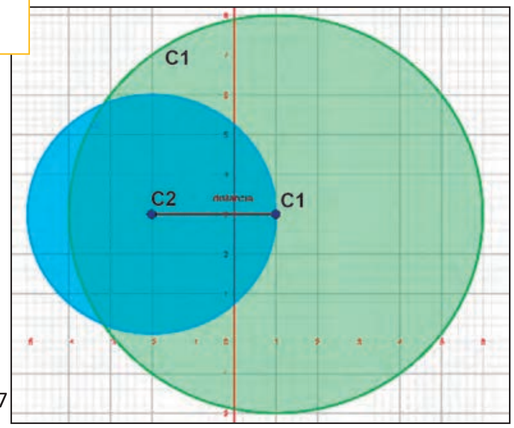


Figura 13: Ejemplo 7

Actividad 16. Grafiquemos y determinemos la naturaleza de la familia de las circunferencias.

a) $x^2+y^2-9+k(x^2+y^2-6x+4y-3)=0$

b) $x^2+y^2+6x-4y+8+k(x^2+y^2-16y+44)=0$

c) $x^2+y^2-2x-6y+2+k(x^2+y^2+8y-2)=0$

d) $4x^2+4y^2-9+k(x^2+y^2-4x+3y+2)=0$

e) $x^2+y^2-8x+6y+16+k(x^2+y^2+2x-12y+12)=0$

7. Tangente a una circunferencia

Realicemos el análisis con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8. La recta 4x - 3y - 8 = 0 es tangente a una circunferencia que tiene su centro en el punto (0;3). Calculemos y grafiquemos la ecuación de la circunferencia.

El radio "r" se calcula por la siguiente ecuación:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$r=\left|\frac{4\cdot 0-3\cdot 3-8}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-17}{5}\right|\Rightarrow\boxed{r=\frac{17}{5}}$$

Reemplazamos el centro y el radio:

$$(x-0)^2+(y-3)^2=\left(\frac{17}{5}\right)^2$$

$$x^2+y^2-6y+9-\frac{289}{25}=0$$

$$25x^2+25y^2-150y+225-289=0$$

$$\therefore\ \varepsilon: 25x^2+25y^2-150y-64=0$$

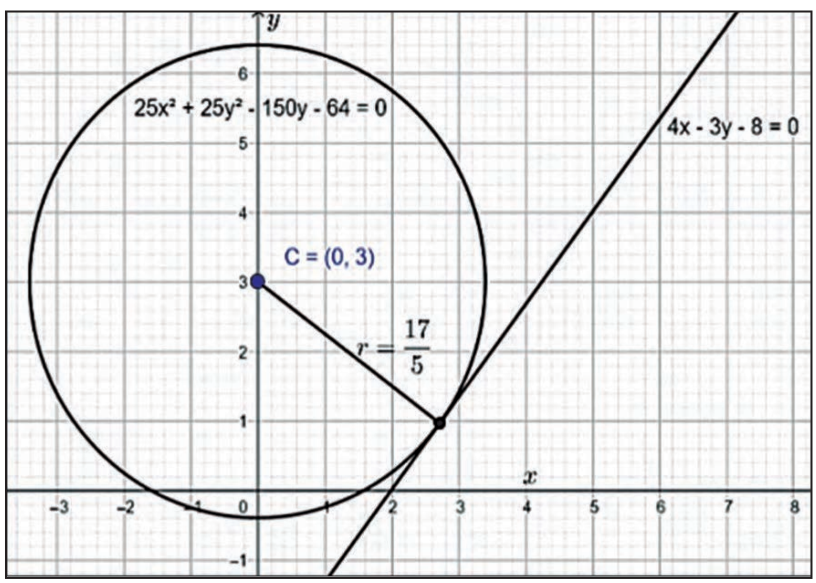


Figura 14: Ejemplo 8

Actividad 17. Determina y gráfica la ecuación de la recta L:3x-4y+43=0 es tangente a una circunferencia que tiene su centro en el punto P(-5;7).

8. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

El desarrollo de la circunferencia en la vida cotidiana tiene varias aplicaciones que nos han ayudado a la evolución y desarrollo de la construcción en nuestra sociedad actual, el uso de la rueda como medio fundamental para el transporte ha sido de vital importancia para el comercio y la comunicación.

Calculamos la ecuación de la circunferencia de una rueda de bicicleta de 29 cm de diámetro.

$r = \frac{29}{2}$

$r = 14.5$ cm

Apliquemos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = \left(\frac{29}{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2-\frac{841}{4} = 0$$

$$\therefore\ \varepsilon: 4x^2+4y^2-841 = 0$$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 18. Debatimos con las compañeras y compañeros sobre la importancia de la circunferencia en la telecomunicación y otros, y respondemos las siguientes preguntas.

1) ¿Qué problemas cotidianos podemos resolver a través de ecuaciones de la circunferencia?
2) ¿Porqué es importante las circunferencia en el avance tecnológico?

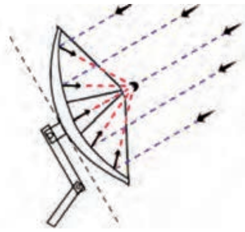
¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 19. Pintamos las líneas curvas de la cancha de básquet, haciendo énfasis en las circunferencias, no olvidemos que el centro de la cancha es el origen C(0; 0).

PARÁBOLA Y SU RELACIÓN CON SITUACIONES COTIDIANAS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Isabella y Jerson Junior decidieron adquirir una antena parabólica para poder conectarse a la señal satelital de la radio y la televisión, pero la única indicación que les dieron, cuando hicieron la compra fue que apuntaran hacia donde el sol se esconde. Por eso, decidieron utilizar estas aplicaciones Android: DishPointer o Satellite Finder Pro, para poder encontrar los grados Acimut con respecto al satélite artificial de telecomunicaciones Tupac_Katari -(TKSat_1_87.2W o STKSat_1_87.1W)-, también la inclinación o elevación que la antena debe tener para poder captar la señal. Con la ayuda de su profesor, analizaron el movimiento de traslación que realiza la tierra, cómo afecta a la captura de la señal del satélite Tupac Katari.



Actividad 20. Respondemos en el cuaderno las siguientes preguntas:
1) ¿Tienen algo de especial las antenas parabólicas para poder captar la señal satelital del Tupac Katari?
2)¿Dónde encontramos la incidencia (cobertura) de señal en una antena parabólica?
3) ¿Qué tan importante es el receptor en la parábola y cómo ayuda a construir otros tipos de antenas parabólicas?
4) ¿La elipse y la hipérbola tendrán alguna aplicabilidad en la incidencia de señal al satelital del Tupac Katari?
5) ¿Cómo ayudan en tu comunidad o barrio las cónicas?

Muchos lugares de nuestro Estado Plurinacional de Bolivia, las familias utilizan antenas parabólicas para conectarse a la señal satelital y a la red de Internet, más en estos tiempos de transmisión de clases a distancia.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición de Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco "F" y de una recta fija del mismo plano llamada directriz. $\overline{FP} = \overline{PQ}$

2. Elementos

La Parábola tiene los siguientes elementos:

Vértice (v). Es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría.
Foco (F). Es el punto fijo, situado sobre el eje de simetría a *P* unidades del vértice.
Eje de simetría (l_1). Recta perpendicular a la directriz l y que pasa por foco.
Cuerda ($\overline{CE}$). Es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola.
Directriz (l). Recta fija, perpendicular al eje de simetría l_1.
Cuerda Focal ($\overline{AB}$). Segmento de recta que une dos puntos de la parábola pasando por el foco.
Lado Recto (LR). Es una cuerda focal perpendicular al eje de simetría.
Radio Vector (PF'). Segmento de recta que une el foco con un punto de la parábola.

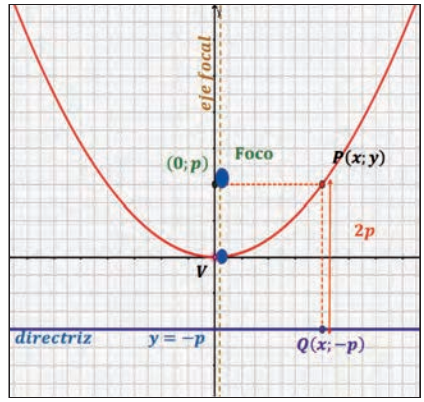


Figura 1: Parábola

En el Plano Cartesiano, una parábola puede tener su vértice en cualquier par ordenado y puede estar orientada hacia arriba, abajo, izquierda o derecha, como se ve en las antenas parabólicas.

3. Ecuaciones de la parábola

Ahora veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje de simetría coincide con uno de los ejes coordenados.

3.1. La parábola en el eje vertical

Consideremos que el vértice de la parábola es V (0; 0), y su eje de simetría Y (x = 0). Sea *p* la distancia dirigida desde el vértice hasta la directriz o al foco, esto es: $|p| = |\overline{QV}| = |\overline{VF}|$

1) Sea P (x; y), el punto genérico de la parábola

2) Por definición, si $P \in l \rightarrow |\overline{PF}| = d(P; l) \rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y+p|$

3) Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene:
$$(x)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

De donde: $x^2 = \pm 4py$

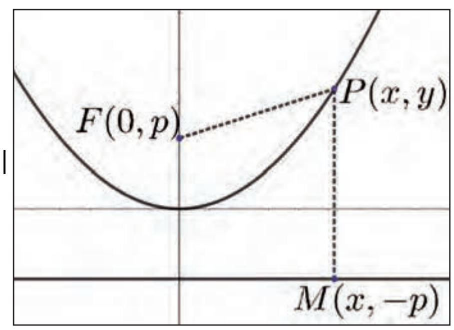


Figura 2: Parábola eje vertical

3.2. La parábola en el eje horizontal

Consideremos que el vértice de la parábola sea V (0; 0), y que su eje de simetría sea el eje X (y = 0). Sea *p* la distancia dirigida desde el vértice hasta la directriz o al foco, esto es. $|p| = |\overline{QV}| = |\overline{VF}|$

Sea P (x; y), el punto genérico de la parábola

Por definición, si $P \in l \rightarrow |\overline{PF}| = d(P; l) \rightarrow \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = |x+p|$

Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene: $(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$

De donde: $y^2 = \pm 4px$

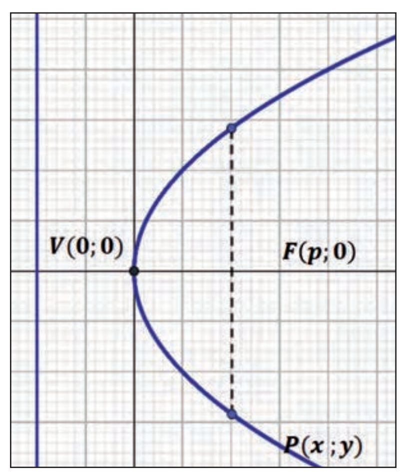


Figura 3: Parábola eje horizontal

3.3. Ecuaciones de la parábola con vértice (h; k) fuera del origen

<u>Consideremos la parábola cuyo eje es paralelo al eje X</u> y cuyo vértice es el punto V (h; k). Si trasladamos el sistema de coordenadas XY al sistema X'Y' de tal forma que el nuevo origen O' coincida con V (h; k), obtenemos una parábola con vértice en O', cuya ecuación es: $y'^2 = 4px'$

Las ecuaciones de traslación dan: $x' = x - h$; $y' = y - k$

Que sustituidas en, se obtiene: $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$

Además de la ecuación, es de interés conocer los siguientes elementos de la parábola paralelo al eje X

1) Vértice: V (h; k)
2) Foco: F (h + p; k)
3) Lado Recto: LR = l 4p l
4) Ecuación de la directriz: L: x = h – p
5) Ecuación del eje: L_1: y = k
6) Coordenadas de los extremos del lado recto:
   L (h + p; k + l 2p l), R (h + p; k – l 2p l)
7) Longitud del radio vector:
   r = l x_1 – h + p l

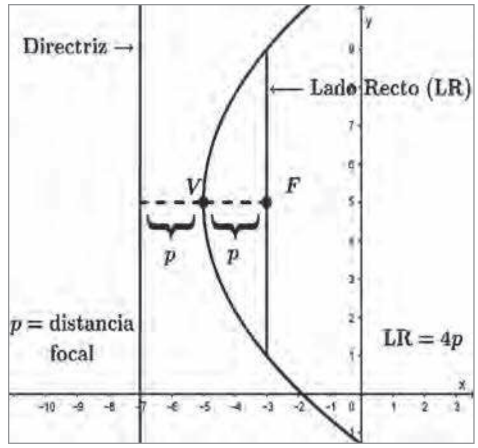


Figura 4: Parábola paralelo al eje X

<u>Consideremos la parábola cuyo eje es paralelo al eje y</u>, y cuyo vértice es el punto V (h; k). Si trasladamos el sistema de coordenadas XY al sistema X'Y' de tal forma que el nuevo origen O' coincida con V (h; k), obtenemos una parábola con vértice en O', cuya ecuación es: $x'^2 = 4py'$

Las ecuaciones de traslación dan: $x' = x - h$; $y' = y - k$

Que sustituidas en la ecuación se obtiene:

$$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$$

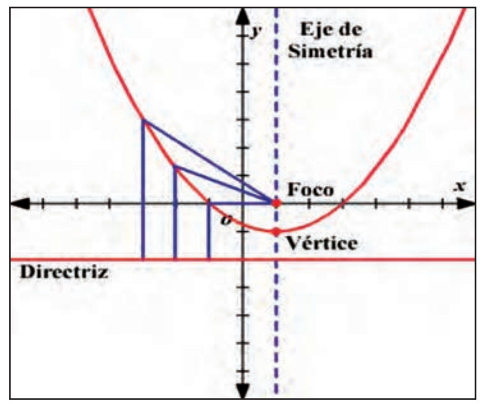


Figura 5: Parábola paralelo al eje Y

Además de la ecuación, es de interés conocer los siguientes elementos de la parábola paralelo al eje Y

1) Vértice: V (h; k)
2) Foco: F (h; k + p)
3) Lado Recto: LR = l 4p l
4) Ecuación de la directriz:
   L: y = k – p
5) Ecuación del eje: L1: x = h
6) Coordenadas de los extremos del lado recto:
   L (h + l 2p l; k+ p), R (h – l 2p l; k+ p)
7) Longitud del radio vector:
   r = l y1 – k + p l

Ejemplo 1. Hallamos el foco y la directriz de la parábola con vértice en el origen y que contiene al punto B (3;4) y su eje de simetría (o eje focal) es paralelo al eje X.

Resolución:

De acuerdo a la información tenemos una parábola de la forma $y^2 = 4px$, el punto B $(3,4)$ nos indica que $x = 3$, $y = 4$, (porque es un punto que está en la parábola). Reemplazamos las coordenadas del punto B en la ecuación.

$$y^2 = 4px$$

$$4^2 = 4p(3) \implies 16 = 12p \implies p = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Entonces la ecuación será

$$y^2 = 4\left(\frac{4}{3}\right)x \qquad \implies \qquad y^2 = \frac{16}{3}x$$

El Foco estará en el punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Vemos que $\frac{4}{3}$ corresponde al valor de "p", y como la directriz está a la misma distancia de "p" respecto al vértice, pero hacia el lado opuesto, entonces, la directriz es: $\boldsymbol{x = -\frac{4}{3}}$.

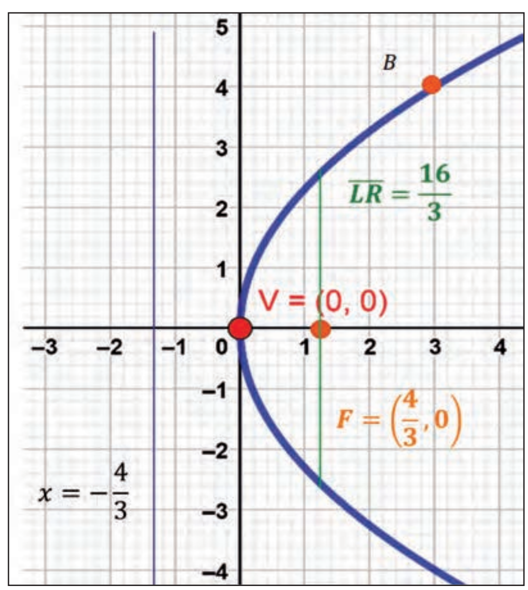


Figura 6: Ejemplo 1

Actividad 21. Encontramos los elementos (Vértice, Foco, Lado Recto, Directriz y Parámetro P) de las siguientes parábolas y grafiquemos las mismas: a) $y^2 = 8x$ b) $y^2 = -8x$ c) $x^2 = 8y$ d) $x^2 = -8y$

Ejemplo 2. Determinamos y graficamos los elementos de la parábola (y + 3)² = -8(x + 2).

Resolución:
Esta parábola corresponde a la forma (y - k)² = - 4p(x - h), entonces:
4p = - 8
p = - 2
Vértice: V(-2 ;-3)
Foco: F(h + p ; k) => F(-2 -2 ; -3)=> F (-4 ; -3)

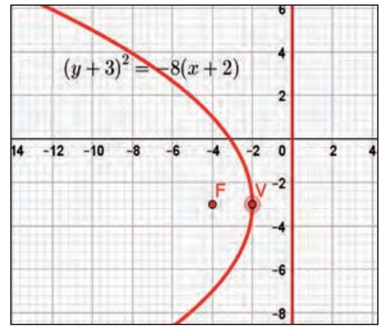


Figura 7: Ejemplo 2

Ejemplo 3. Determinamos y graficamos la ecuación de la parábola con vértice en (3; 2) y foco en (5; 2).

Resolución: Al analizar las coordenadas de vértice (3, 2) y foco (5, 2), vemos que su ordenada es común (y = 2), por lo que se concluye que están alineados horizontalmente y que el foco está a la derecha del vértice. Según ya vimos, en este caso la ecuación que resulte tiene la forma: **(y - k)² = 4p (x - h)**
Siendo las coordenadas del vértice (h;k), se sustituyen en la ecuación y resulta: (y - 2)² = 4p (x - 3)
Donde el parámetro p que representa la distancia del vértice al foco, que podemos calcular por diferencia de las abscisas correspondientes:
p = 5 - 3 => p = 2, sustituimos: (y - 2)² = 8(x - 3)

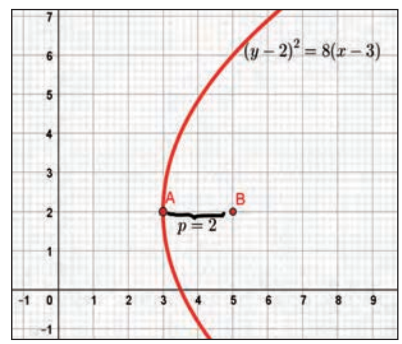


Figura 8: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Determinamos y graficamos el vértice (V), foco (F), la longitud del lado recto (LR) y la ecuación de la directriz (D), de la parábola (x + 6)² = -24(y - 2).

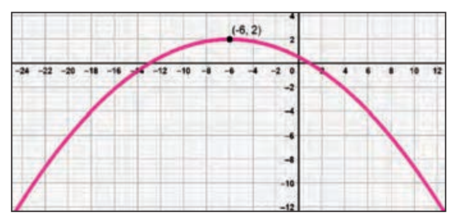


Figura 9: Ejemplo 4

Resolución:

La parábola corresponde a la forma $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2 = -\boldsymbol{4p}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$, las formulas a aplicar son: Vértice, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$; Foco, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})$; Lado recto, $\boldsymbol{LR} = |\boldsymbol{4p}|$; ecuación de la directriz: $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

Vértice: $(x+6)^2 = -24(y-2) \Rightarrow [x-(-6)]^2 = -24[y-(+2)]$, entonces, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{-6},\boldsymbol{2})$, siempre con signo cambiado, respecto a la ecuación original, $(x+6)^2 = -24(y-2)$.

Para el foco determinamos el valor de p, $4p = -24 \Rightarrow p = -6$. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) \Rightarrow F\big(-6{,}2+(-6)\big) \Rightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{-6},\boldsymbol{-4})$.

Lado recto: $\boldsymbol{LR} = |\boldsymbol{4p}| \Rightarrow LR = |4(-6)| \Rightarrow \boldsymbol{LR} = \boldsymbol{24}$.

Directriz: $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \Rightarrow y-2+(-6) = 0 \Rightarrow y-2-6 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}-\boldsymbol{8} = \boldsymbol{0}$.

Actividad 22. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

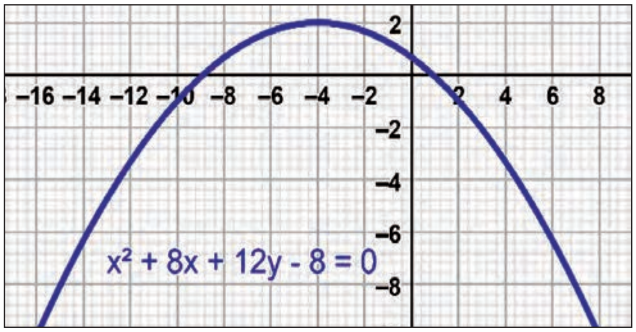
1) Obtenemos la ecuación de la parábola que tiene foco $F(3;4)$, de vértice $V(1;4)$.
2) Determinamos la ecuación de la parábola que tiene directriz $y = 4$ y vértice $(0;0)$.
3) Encontramos la ecuación de la parábola de directriz $x = 2$ y foco $(-2;0)$.
4) Dada la parábola $(x+2)^2 = 12(y-2)$, encontramos el foco y el vértice.
5) Dada la parábola $(x-3)^2 = 8(y-2)$, determinamos su vértice, foco y directriz.

3.4. Ecuación de la parábola en su forma general

En todos los casos, la estructura de la ecuación de la parábola tiene las siguientes características: Existe solamente una variable al cuadrado, x² o bien y² y otra lineal. Para llegar a dicha expresión o forma general, es necesario desarrollar algebraicamente la forma ordinaria o canónica de la ecuación y obtenemos la siguiente ecuación: x² + Dx + Ey + F = 0. Es la ecuación de una parábola vertical en su forma general. Análogamente, para una parábola de orientación horizontal, la ecuación en su forma general será: y² + Dx + Ey + F = 0

Ejemplo 5. Determinamos la ecuación general y graficamos una parábola que tiene su vértice en el punto (-4 ; 2) y su directriz es y = 5

Figura 10: Ejemplo 5



Analizando las coordenadas del vértice y la posición de la directriz, se puede concluir que:

La directriz es horizontal, por tanto, la posición de la parábola es vertical.

La directriz corta al eje de las ordenadas en un valor (5) mayor que la ordenada del vértice (2), por tanto, la parábola se abre hacia abajo en sentido negativo del eje de las "y".

Las coordenadas del vértice no corresponden con las del origen.

Dado lo anterior, se trata entonces de una parábola cuya ecuación ordinaria o canónica es del tipo: **(x - h)² = -4p (y - k)**

De las coordenadas del vértice se obtiene: **h = -4 => k = 2**

Se obtiene p por diferencia entre las ordenadas del vértice y la directriz, resultando:

$p = 5 - 2$, por tanto, $p = 3$

Sustituimos valores en la ecuación ordinaria, resulta:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

$$[x-(-4)]^2 = -4\cdot 3[y-(+2)]$$

$$(x+4)^2 = -12(y-2)$$

$$(x+4)^2 = -12y + 24$$

Operación auxiliar: Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$(x+4)(x+4) = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$

Reducimos términos semejantes e igualamos a cero la ecuación tenemos:

$$\varepsilon: x^2 + 8x + 12y - 8 = 0$$

Ejemplo 6. Dada la ecuación de la parábola y² + 8y - 6x + 4 = 0, graficamos y encontramos las coordenadas del vértice y del foco, así como la ecuación de su directriz.

Resolución: una forma de obtener los elementos solicitados consiste en reducir la ecuación general expresándola en su forma ordinaria o canónica, aplicando el método completando cuadrados.

$$\boldsymbol{y^2 + 8y - 6x + 4 = 0}$$

$$y^2 + 8y = 6x - 4$$

$$y^2 + 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 6x - 4 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \quad \textit{completando cuadrados}$$

$$y^2 + 8y + 16 = 6x + 12 \quad \textit{simplificando}$$

$$(y+4)^2 = 6(x+2) \quad \textit{factorizando}$$

Con lo cual se puede determinar que:

$k = -4$ y $h = -2$ $\quad \boldsymbol{V(-2,-4)}$

Además, si $4p = 6$ entonces: $p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

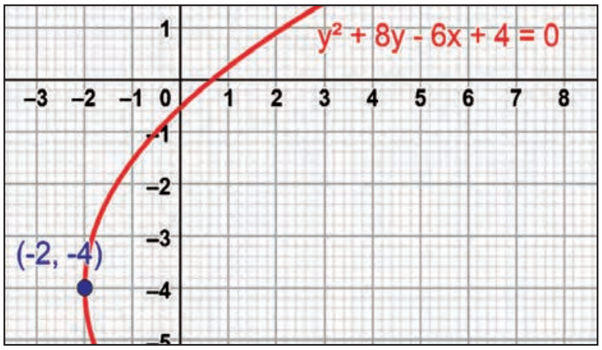


Figura 11: Ejemplo 6

Considerando la orientación ya señalada de la parábola y el valor de p, es posible determinar la posición del foco, ya que éste estará a la derecha del vértice, a una distancia p desde h y con la misma ordenada k, resultando: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$$F(h+p,k) \Longrightarrow F\left(-2+\frac{3}{2},-4\right) \Longrightarrow \boldsymbol{F\left(-\frac{1}{2},-4\right)}$$

La ecuación de la directriz se obtiene de:

$x - h + p = 0$

Finalmente: $x - (-2) + \left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Longrightarrow$

$$x + \frac{7}{2} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x = -\frac{7}{2}}$$

Actividad 23. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Determinar las coordenadas del Vértice, Foco y calcular el lado recto de la parábola de ecuación: $y^2 + 4x - y + 5 = 0$.

2) Determinar la ecuación ordinaria, vértice y foco de la parábola: $3y^2 + 6x - y + 2 = 0$.

4. Parábola que pasa por tres puntos

Trabajamos a partir de la ecuación general de la parábola e identificando el sentido de las ramas. Supongamos que se tiene los puntos $A(x_1;y_1)$,$B(x_2;y_2)$ y $C(x_3;y_3)$. Consideramos la siguiente ecuación: **$x^2+Dx+Ey+F=0$ (β)**

Reemplazamos los puntos A,B y C en la ecuación (β). Así:

$$x_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \qquad (1)$$
$$x_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \qquad (2)$$
$$x_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1),(2) y (3) forman un sistema de ecuaciones de 3 x 3, resolviendo este determinamos el valor de D, E y F. Realizamos de manera análoga para parábolas de ecuación general: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Ejemplo 7. Determinamos y graficamos la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A(1;2), B(5;6) y C(3;3).

Representamos los puntos en el plano cartesiano.

Observamos que la parábola es vertical con ramas hacia arriba, entonces utilizamos la ecuación:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (\beta)$$

Reemplazamos los puntos A, B y C en la ecuación (β). Así:

$$1^2 + D + 2E + F = 0 \qquad (1)$$
$$5^2 + 5D + 6E + F = 0 \qquad (2)$$
$$3^2 + 3D + 3E + F = 0 \qquad (3)$$

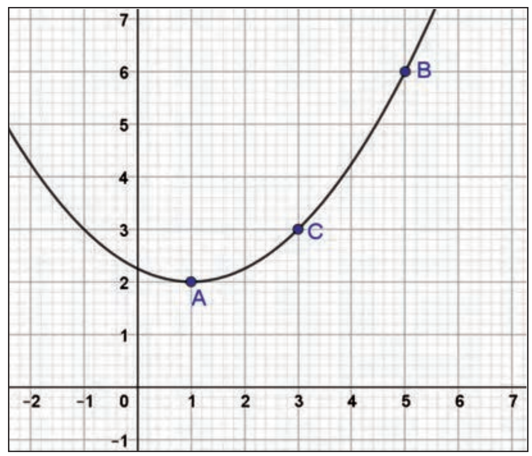


Figura 12: Ejemplo 7

$$\begin{cases} D + 2E + F = -1 & ① \\ 5D + 6E + F = -25 & ② \\ 3D + 3E + F = -9 & ③ \end{cases}$$

(-1)② y ③

$$\begin{cases} -5D - 6E - \cancel{F} = 25 \\ 3D + 3E + \cancel{F} = -9 \end{cases}$$
$$-2D - 3E \quad = 16 \quad ⑤$$

$$\begin{cases} D + 2E + \cancel{F} = -1 \\ -5D - 6E - \cancel{F} = 25 \end{cases}$$
$$-4D - 4E \quad = 24 \quad ④$$

$(-1)(\div 2)$④ y ⑤

$$\begin{cases} \cancel{2D} + 2E = -12 \\ -\cancel{2D} - 3E = 16 \end{cases}$$
$$-E = 4$$
$$\mathbf{E = -4}$$

En la ecuación tenemos:

$$-2D - 3E = 16 \quad ⑤$$
$$-2D - 3(-4) = 16$$
$$-2D = 16 - 12$$
$$-2D = 4$$
$$D = \frac{4}{-2}$$
$$\mathbf{D = -2}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos: D = -2, E = -4 y F = 9, entonces la ecuación de la parábola es. **ε: x^2 -2x -4y + 9 = 0**.

Una forma de obtener los elementos solicitados consiste en reducir la ecuación general expresándola en su forma ordinaria o canónica, aplicando el método completando cuadrados.

$$\boldsymbol{x^2 - 2x - 4y + 9 = 0}$$
$$x^2 - 2x = 4y - 9$$
$$x^2 - \mathbf{2x} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 4y - 9 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \quad \textit{completando cuadrados}$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4y - 8 \quad \textit{simplificando}$$
$$(x-1)^2 = 4(y-2) \quad \textit{factorizando}$$

Con lo cual se puede determinar que:

$$h = 1 \;\text{ y }\; k = 2 \qquad \boldsymbol{V(1;2)}$$

Además, si $4p = 4$ entonces: $p = \frac{4}{4} = \mathbf{1}$

Actividad 24. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Determinar y graficar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A(-5 ; 2),B(-1 ; 4) y C(3 ; 2).
2. Determinar y graficar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A(12 ; -12), B(2 ; 8) y C(8 ; 12).

5. Tangente a una parábola

Como la ecuación de una parábola es de segundo grado, podemos obtener la ecuación de la tangente empleando el método optativo de la discriminante o el método de la tangente en el origen de una curva.

En general, son tres los problemas de tangencia que se presentan:

- Tangente en un punto de contacto dado.
- Tangente paralela a una dirección dada.
- Tangentes trazadas desde un punto exterior.

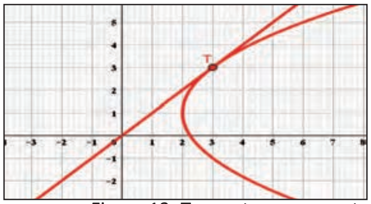


Figura 13: Tangente en un punto

Teorema 1. Ecuación de la tangente en un punto de contacto dado.

La tangente a la parábola $\varepsilon.y^2 = 4px$, en cualquier punto $P(x_1 ; y_1)$, de la curva tiene por ecuación: $y_1 y = 2p(x+x_1)$

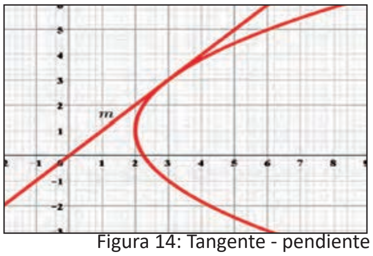


Figura 14: Tangente - pendiente

Teorema 2. Ecuación de la tangente de pendiente conocida.

La tangente de pendiente m a la parábola: $y^2=4px$ tiene la forma:
$y = mx + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$

Ecuación conociendo un punto exterior de la parábola por donde pasa la recta tangente, en este caso tenemos dos soluciones o rectas tangentes.

Aplicamos el siguiente procedimiento:

- Aplicamos la ecuación de la recta, punto-pendiente.
- Despejamos y, sustituimos en la ecuación de la parábola.
- Igualamos a cero la discriminante de la ecuación y resolvemos está.
- Reemplazamos la pendiente en la ecuación punto-pendiente.

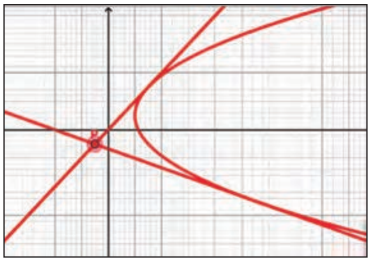


Figura 15: Tangente en un punto exterior

Ejemplo 8. Calculemos las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(1; 4) a la parábola: $y^2+3x-6y+9=0$.

Solución. Las rectas tangentes que pasan por *P* tienen por ecuación:

$$y - 4 = m(x - 1) \quad (\beta)$$

Despejando "x" se tiene: $x = \frac{1}{m}(y + m - 4)$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola tenemos:

$y^2 + \frac{3}{m}(y + m - 4) - 6y + 9 = 0$

$my^2 + (3 - 6m)y + 12m - 12 = 0$

Por condición de tangencia: $(3 - 6m)^2 - 4m(12m - 12) = 0$

Efectuando obtenemos : $4m^2 - 4m - 3 = 0 \leftrightarrow m = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2}$

Por lo que, en (β), las ecuaciones de las dos tangentes son:

$L_1. 3x - 2y + 5 = 0 \qquad L_2. x + 2y - 9 = 0$

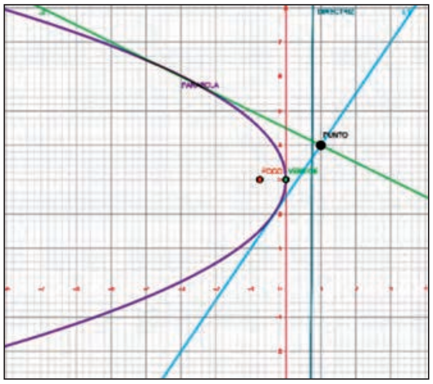


Figura 16: Ejemplo 8

Actividad 25. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Determinemos la ecuación de la recta tangente a la parábola: $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$ en el punto (-2;-1).
2. Determinemos la ecuación de la recta tangente de pendiente m = 2 a la parábola: $y^2 - 6x + 5y - 11 = 0$.

6. La función cuadrática y aplicaciones de la parábola

La función cuadrática general es aquella función con dominio R y definida por la regla de correspondencia.

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c = 0}$, donde a, b, y c son constantes que representan números reales y $a \neq 0$.

La función f definida por esta ecuación puede escribirse como: $f = \{(x; y) \in \boldsymbol{R}^2 / y = \boldsymbol{ax^2 + bx + c}\}$ y su gráfica es una parábola cuyo eje de simetría es paralelo o coincidente con el eje Y, abierta hacia arriba si: $a > 0$ y hacia abajo si: $a < 0$.

- Para $a > 0$, la función tiene su valor mínimo k , cuando $x = -\frac{b}{2a}$, es decir, el punto más bajo de la gráfica es el vértice V (h; k).
- Para $a < 0$, la función tiene su valor máximo k, cuando,$x = -\frac{b}{2a}$ es decir, el punto más alto de la gráfica es el vértice V (h; k).

Ejemplo 9. Determinamos un valor máximo o bien un mínimo para la función: $f = \{(x; y) \in \boldsymbol{R}^2 / y = \boldsymbol{x^2 + 6x + 2y + 5 = 0}\}$

Solución. La ecuación que define a f es:

$x^2 + 6x + 2y + 5 = 0$

$$2y = -x^2 - 6x - 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$$

De este modo, los valores de la función $f(x)$ están dados por

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$

Para esta función cuadrática, $a = -\frac{1}{2}$, $b = -3$. Como $a < 0$,

f tiene un valor máximo

en el punto donde $x = -b/2a$, esto es, en : $\boldsymbol{x = -\frac{-3}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -3}$

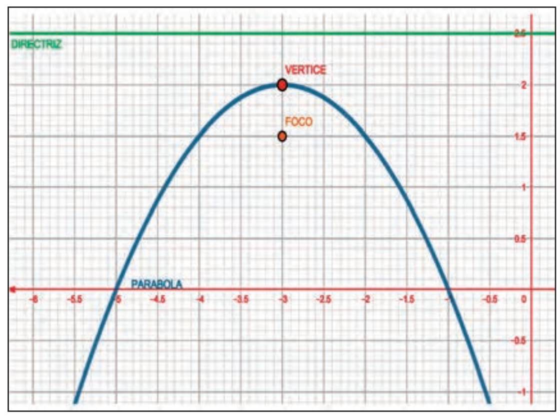


Figura 17: Ejemplo 9

El valor máximo es: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow f(-3) = -\frac{1}{2}(-3)^2 - 3(-3) - \frac{5}{2} \qquad \Leftrightarrow f(-3) = 2$$

Nota. Del uso y aprovechamiento del lenguaje de las funciones se puede expresar diversos tipos de situaciones prácticas que tienen que ver con la geometría, física, economía, biología, etc., en términos de una relación funcional. La función obtenida representa un modelo matemático de tales situaciones prácticas. Mostraremos con unos ejemplos el procedimiento implícito para obtener algunos modelos matemáticos que involucren funciones cuadráticas.

Actividad 26. Determinamos un valor máximo o un mínimo para la función:

$$\boxed{f = \{(x; y) \in \boldsymbol{R}^2 / y = x^2 + 8x + 12y - 8 = 0\}}$$

7. Resolución de problemas aplicados en contexto y la tecnología

El señor Héctor compró una antena parabólica de 3 metros, para ver el mundial de fútbol Qatar 2022. ¿A qué distancia del fondo de la antena está colocado el receptor de señales?
Reemplazamos los datos en la ecuación de la parábola.

Consideramos la gráfica de la parábola tenemos:

$4P = 3\,m$

$P = \frac{3}{4}m$

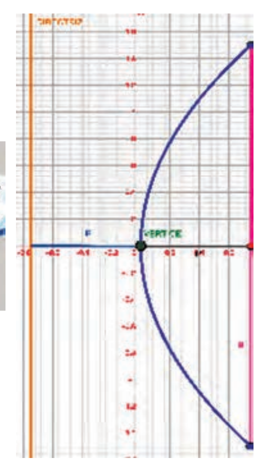
$(y - k)^2 = -4p(x - h)$

$(y - 0)^2 = -4\left(\frac{3}{4}\right)(x - 0)$

$y^2 = -3x$

$\therefore\ \varepsilon\colon\ y^2 + 3x = 0$

El receptor de la antena está a 0.75 metros



¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 27. Reflexionemos sobre la importancia de la propiedad focal de la parábola en las antenas satelitales, lámparas, faros, linternas, etc. y respodemos las siguientes preguntas.

1) En tu contexto, ¿cómo se aplica la parábola?
2) ¿Cómo ayuda la parábola en el desarrollo de la ciencia y tecnología?
3) ¿Por qué crees que es importante aprender sobre las ecucaciones de la parábola?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 28. Realicemos una maqueta de un puente colgante a escala 1:20, identificando los elementos de la parábola.

LA ELIPSE APLICADO A LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Noticiencia

Debido a la resistencia del viento, las trayectorias que realizan los aviones cuando hacen viajes circulares se vuelven elípticas.

El maestro de Estudios Sociales hablo sobre los movimientos de los planetas, mencionando que su trayectoria gira en forma elíptica alrededor de una estrella llamado Sol. José María quedó motivado sobre el tema más cuando la maestra de Artes Plásticas les pidió dibujar la figura de la elipse, entonces decidió profundizar sus conocimientos e investigó que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas y este se encuentra en uno de los focos. La excentricidad de la órbita de la tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167.

Actividad 29 . Realicemos la siguiente práctica:
El método se basa en la definición más corriente de la elipse, como "lugar geométrico" de los puntos cuya suma de distancias a los focos es constante.

Materiales
- Una cuerda
- Lápiz
- Colores
- Reglas
- Dos chinches o alfileres

Procedimiento
Los alfileres se colocan en el lugar de los focos y la cuerda debe medir lo mismo que el eje mayor (2a). Al lazo de cuerda se le debe añadir la distancia de los focos. Con la cuerda tensa se mueve el lápiz o material de dibujo rodeando por completos los dos focos.

- ¿Por qué los planetas giran alrededor del Sol?
- ¿Qué planeta tiene la mayor excentricidad?
- ¿Los cometas y los satélites también describen órbitas elípticas? ¿Por qué?

¡Continuemos con la teoría!

1. Definición

Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos (ε), que se mueven en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos, es constante de la elipse. Si denotamos la suma constante por 2a, según esta definición y refiriéndonos a la gráfica de la figura 1, se tiene:

$P \in \varepsilon \leftrightarrow |\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$

$R \in \varepsilon \leftrightarrow |\overline{RF_1}| + |\overline{RF_2}| = 2a$

El segmento: $|\overline{V_1V_2}| = 2a$

se denomina *eje mayor,*

y el segmento: $|\overline{B_1B_2}| = 2b$

es el *eje menor* de la elipse.

La distancia entre los focos,

esto es: $|\overline{F_1F_2}| = 2c$, se llama *distancia focal.*

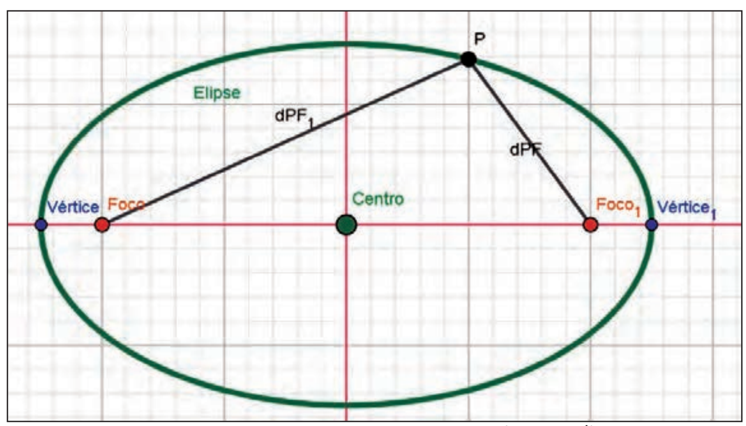


Figura 1: Elipse

2. Elementos de la elipse

- **Focos:** son los puntos fijos F_1 y F_2.
- **Eje focal:** es la recta que pasa por los focos.
- **Eje secundario:** es la mediatriz del segmento $F_1\ F_2$.
- **Centro:** es el punto de intersección de los ejes.
- **Radios vectores:** son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: PF_1 y PF_2.
- **Distancia focal:** es el segmento $\overline{F_1\ F_2}$ de longitud 2c, c es el valor de la semidistancia focal.
- **Vértices:** Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: V_1 y V_2 ; B_1 y B_2.
- **Eje mayor:** es el segmento $\overline{V_1\ V_2}$ de longitud 2a, a es el valor del semieje mayor.
- **Eje menor:** es el segmento $\overline{B_1\ B_2}$ de longitud 2b, b es el valor del semieje menor.
- **Ejes de simetría:** son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.
- **Centro de simetría:** coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

Los elementos de la elipse cuando el eje mayor es coincidente con el eje X:

1) Centro: C (h; k)
2) Vértices: V_1 (h + a; k), V_2 (h – a; k)
3) Focos: F_1 (h + c; k), F_2 (h – c; k)
4) Extremos del eje menor:
   B_1 (h; k + b), B_2 (h; k – b)
5) Lado recto: $\mathrm{LR} = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
7) Extremos de los lados rectos:
   L_1 $(h + c; k + \frac{b^2}{a})$, R_1 $(h + c; k - \frac{b^2}{a})$
   L_2 $(h - c; k + \frac{b^2}{a})$, L_2 $(h - c; k - \frac{b^2}{a})$
8) Ecuaciones de las directrices: $x = h \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Radios vectores para un punto P $(x_1; y_1)$, de la elipse:
   $r_1 = a - ex_1$ (Foco derecho) y $r_2 = a + ex_1$ (Foco izquierdo)

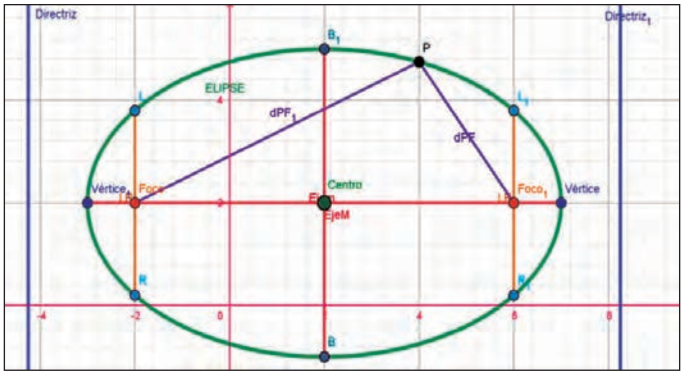


Figura 2: Elipse eje X

Los elementos de la elipse cuando el eje mayor es coincidente con el eje Y:

1) Centro: C (h; k)
2) Vértices: V_1 (h; k + a), V_2 (h; k– a)
3) Focos: F_1 (h; k + c), F_2 (h; k – c)
4) Extremos del eje menor:
   B_1 (h + b; k), B_2 (h – b; k)
5) Lado recto: $\mathrm{LR} = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
7) Extremos de los lados rectos:
   L_1 $(h + \frac{b^2}{a}; k + c)$, R_1 $(h - \frac{b^2}{a}; k + c)$
   L_2 $(h + \frac{b^2}{a}; k - c)$, L_2 $(h - \frac{b^2}{a}; k - c)$
8) Ecuaciones de las directrices: $y = k \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Radios vectores para un punto P $(x_1; y_1)$, de la elipse:
   $r_1 = a - ey_1$ (Foco superior) y $r_2 = a + ey_1$ (Foco inferior).

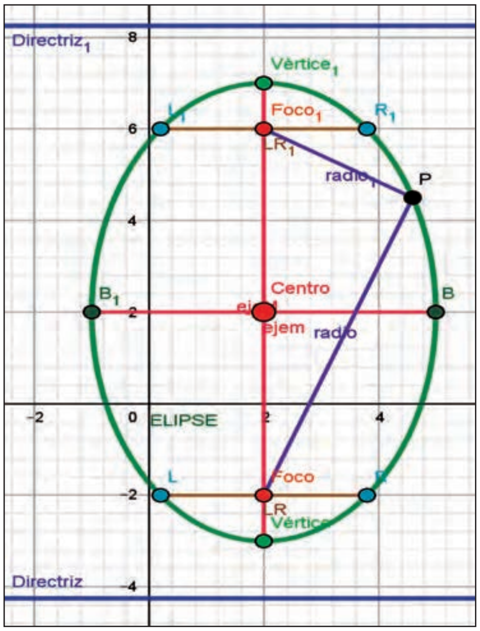


Figura 3: Elipse eje Y

3. Ecuaciones de la elipse

A continuación, estudiaremos las ecuaciones de la elipse cuando su centro se encuentra en el origen y su eje mayor o eje focal coincide con uno de los ejes del plano cartesiano, como así también sus otras ecuaciones:

3.1. Elipse con centro en el origen y eje mayor coincidente con el eje X

Esta primera forma canónica de la ecuación de la elipse se denomina también **elipse horizontal** con centro en el origen.

$$\varepsilon: \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

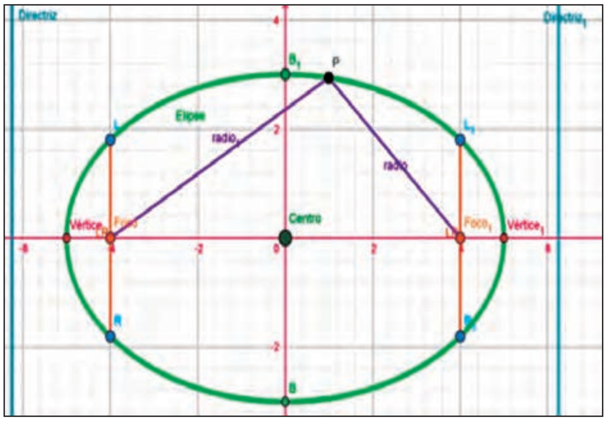


Figura 4: Elipse origen X

3.2. Elipse con centro en el origen y eje mayor coincidente con el eje Y

Esta segunda forma canónica es llamada **elipse vertical** con centro en el origen.

$$\varepsilon: \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{a^2}} = \mathbf{1}$$

Figura 5: Elipse origen "Y"

3.3. Elipse con eje mayor paralelo al eje X

Sea la elipse de eje focal paralelo al eje X y cuyo centro es el punto C (h; k), mostrada en el Figura 2. Cuya ecuación, según la primera forma es:

$$\varepsilon: \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2}{\mathbf{a^2}} + \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

3.4. Elipse con eje mayor paralelo al eje Y

Sea la elipse de eje focal paralelo al eje Y cuyo centro es el punto C (h; k). Según la primera forma es: las ecuaciones con eje mayor reciben el nombre de **formas ordinarias o generalizadas**. Es de interés conocer los siguientes elementos de la elipse.

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2}{\mathbf{b^2}} + \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2}{\mathbf{a^2}} = \mathbf{1}$$

Ejemplo 1. Hallamos la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos V1 (6; 1) y V2 (-2; 1) y pasa por el punto P (2; 3).

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2}{\mathbf{a^2}} + \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2}{\mathbf{b^2}} = 1$$

$$\frac{(2-2)^2}{4^2} + \frac{(3-1)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 4$$

$$\frac{16(x-2)^2}{16} + \frac{16(y-1)^2}{4} = 16$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 = 16$$

$$\boldsymbol{\varepsilon: x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 8 = 0}$$

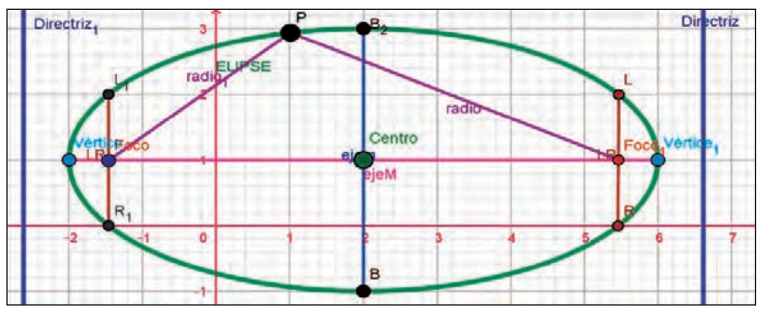


Figura 6: Ejemplo 1

Ejemplo 2. La distancia entre las directrices de una elipse es 24. Hallamos su ecuación si los focos son: F1 (1; 2) y F2 (- 5; 2).

$$d(F-C) = 3$$

$$c = 3$$

$$d(l_1 - l_2) = 24$$

$$\frac{2a^2}{c} = 24$$

$$a^2 = 36$$

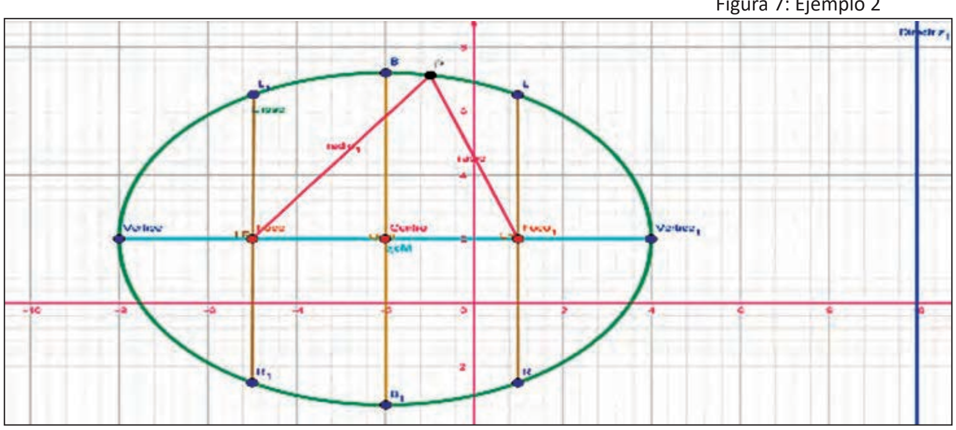
$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2}{\mathbf{a^2}} + \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{27} = 1$$

$$27(x^2 + 4x + 4) + 36(y^2 - 4y + 4) = 972$$

$$\boldsymbol{\varepsilon: 27x^2 + 36y^2 + 108x - 144y - 720 = 0}$$

Figura 7: Ejemplo 2



Ejemplo 3. Hallamos y graficamos la ecuación de la elipse que pasa por el punto P (- 4; 3), y cuyos focos son los puntos: F1 (- 1; 3) y F2 (- 1; - 1).

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(-1+4)^2 + (3-3)^2} + \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-3)^2} = 2a$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{9+16} = 2a$$

$$3 + \sqrt{25} = 2a$$

$$3 + 5 = 2a$$

$$8 = 2a$$

$$8 = 2a$$

$$a = 4$$

Relación de distancia

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(4)^2 = b^2 + (2)^2$$

$$16 = b^2 + 4$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{\mathbf{(x-h)^2}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{(y-k)^2}}{\mathbf{a^2}} = \mathbf{1}$$

$$\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \;//*\, 48$$

$$4(x+1)^2 + 3(x-1)^2 = 48$$

$$4x^2 + 8x + 4 + 3x^2 - 6y + 3 - 48 = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \mathbf{4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y - 41 = 0}$$

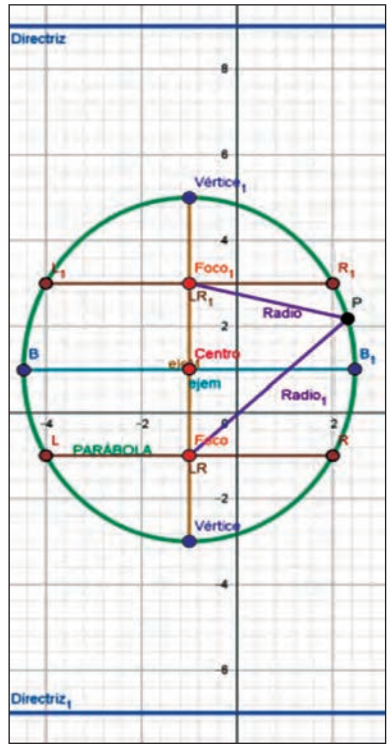


Figura 8: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Hallamos y graficamos la ecuación de la elipse en la cual un vértice es V (- 1; - 3), el foco opuesto F (- 1; 3) y la longitud de su eje menor es $4\sqrt{3}$.

Relación de distancia

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (6-a)^2$$

$$a^2 = 4 \cdot 3 + 36 - 12a + a^2$$

$$12a = 12 + 36$$

$$a = \frac{48}{12}$$

$$a = 4$$

De la gráfica

$$a + c = 6$$

$$c = 6 - a$$

$$\frac{\mathbf{(x-h)^2}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{(y-k)^2}}{\mathbf{a^2}} = \mathbf{1}$$

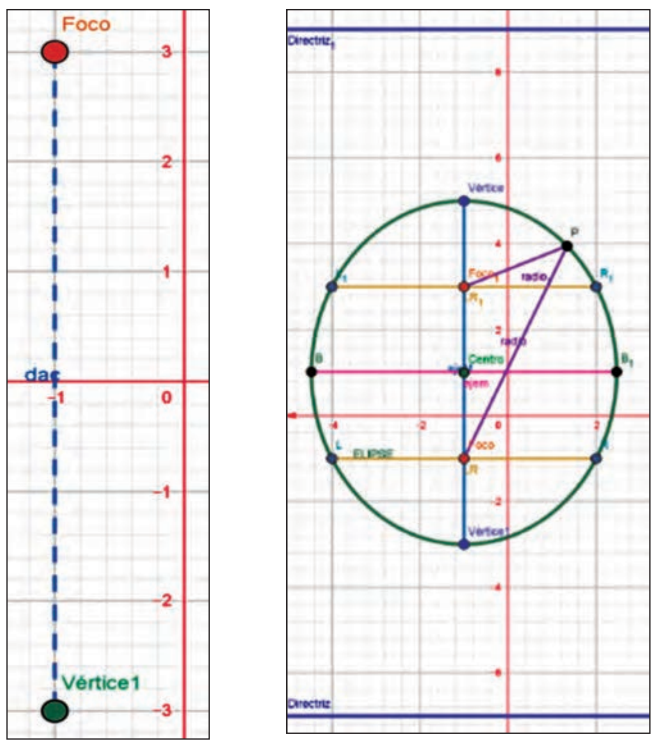
$$\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1 \;//*\, 48$$

$$4(x+1)^2 + 3(x-1)^2 = 48$$

$$4x^2 + 8x + 4 + 3x^2 - 6y + 3 - 48 = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \mathbf{4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y - 41 = 0}$$

Figura 9: Ejemplo 4



Actividad 30. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Hallamos la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos V_1 (7; -2) y V_2 (-5; - 2) y pasa por el punto P (3; 2).
2. La distancia entre las directrices de una elipse es 18. Hallamos su ecuación si sus focos son: F_1 (1; 5) y F_2 (1; 3).
3. Encontramos la ecuación de la elipse que pasa por el punto P (1; 5) y cuyos focos son los puntos: F_1 (5; 2) y F_2 (- 3; 2).
4. Hallamos la ecuación de la elipse en la cual un vértice es V (3; 2), el foco opuesto F (11; 2) y la longitud de su eje menor es 8.

4. Ecuación general de una elipse en posición ordinaria

Ecuación general de la elipse con ejes paralelos a las coordenadas: $\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

donde: $t = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \rightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{t/_A} + \frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{t/_C} = 1$. Es la ecuación ordinaria de una elipse equivalente a las dos ecuaciones, dependiendo la forma del valor que asuma t. Entonces podemos afirmar que:

Si $t > 0$, la ecuación, representa una elipse con centro en $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

Si $t = 0$, la ecuación, representa un punto en $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

Si $t < 0$, la ecuación, representa un conjunto vacío.

Ejemplo 5. Determinamos si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o un conjunto vacío. Si la gráfica es una elipse, hallamos sus elementos:

a) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 108y + 360 = 0$

$$4x^2 - 24x \quad + 9y^2 + 108y = -360$$

$$4\left[x^2 - 6x + \left(\tfrac{6}{2}\right)^2\right] + 9\left[y^2 + 12y + \left(\tfrac{12}{2}\right)^2\right] = -360 + 4\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 9\left(\tfrac{12}{2}\right)^2$$

$$4(x^2 - 6x + 9)^2 + 9(y^2 + 12y + 36) = -360 + 36 + 324$$

$$\mathbf{4(x-3)^2 + 9(y+6)^2 = 0} \quad \therefore \textbf{ es un punto}$$

b) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$

$$25x^2 - 50x \quad + 9y^2 + 36y = 164$$

$$25\left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 9\left[y^2 + 4y + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right] = 164 + 25\left(\tfrac{2}{2}\right)^2 + 9\left(\tfrac{4}{2}\right)^2$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25 + 36$$

$$\frac{25(x-1)^2}{225} + \frac{9(y+2)^2}{225} = \frac{225}{225} \quad \therefore \textbf{ es una Elipse}$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{225}{25}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{225}{9}} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

$$\mathbf{a = 5 \quad b = 3 \quad c = 4}$$

$$\mathbf{h = 1 \quad k = -2}$$

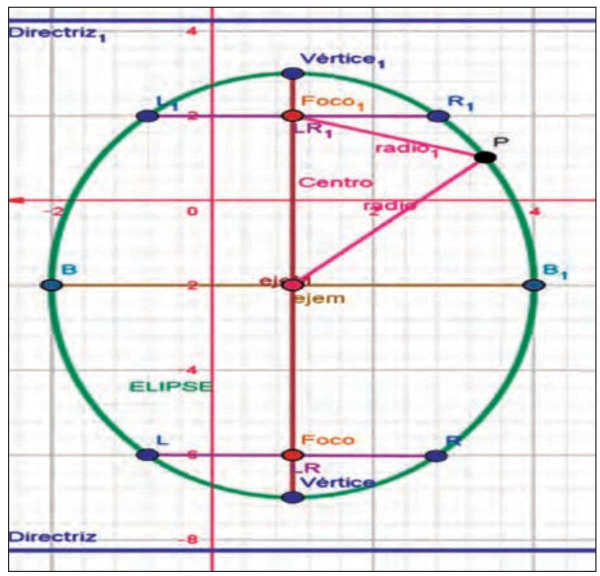


Figura 10: Ejemplo 5

Elementos de la Elipse

1) $C(1; -2)$
2) $V_1(1; 3);\ V_2(1; -7)$
3) $F_1(1; 2);\ F_2(1; -6)$
4) $B_1(4; -2);\ B_2(-2; -2)$
5) $LR = 3.6$
6) $e = 0.8$
7) $L_1(2.8; 2);\quad R_1(-0.8; 2)$
   $L_2(2.8; -6);\ R_2(-0.8; -6)$
8) $y = 4.250\,;\ \ y = -8.250$
9) $d_{L_1 \rightarrow L_2} = 12.5$
10) $r_1 = 5 - 0.8y_1\,,\ r_2 = 5 + 0.8y_1$

Actividad 31. Resolvamos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Determinamos si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o un conjunto vacío. Si la gráfica es una elipse hallar sus elementos: $5x^2 + 4y^2 - 30x - 4y + 46 = 0$
2. Determinamos si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o un conjunto vacío. Si la gráfica es una elipse hallar sus elementos: $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$

Actividad 32

Hallamos la excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 16$

d) $3x^2 + 2y^2 = 6$

Actividad 33

Hallamos la ecuación de la elipse conociendo:

a) $C(0; 0), F(2; 0)$ y $V(3; 0)$

b) $C(0; 0), F(0; 4)$ y $V(0; 5)$

c) $C(1; -1), F(1; 2)$ y $V(1; 4)$

d) $C(-6; 4), V(7; 4)$ y $F(6; 4)$

Actividad 34

Encontramos las distancias a, b y c de las siguientes elipses:

a) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$

b) $25x^2 + 9y^2 - 18y - 216 = 0$

c) $x^2 + 3y^2 - 6x + 6y = 0$

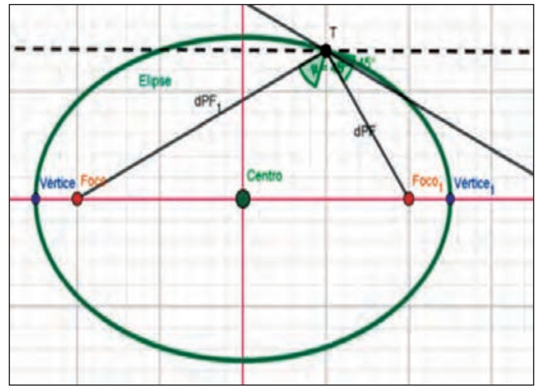
d) $3x^2 + y^2 - 24x + 39 = 0$

5. Propiedades de la elipse

5.1. Propiedad reflectora de una elipse

La tangente a una elipse en un punto T forma ángulos iguales con los radios focales en este punto. La aplicación de esta propiedad es la siguiente: si se tienen superficies reflectoras elípticas, las ondas sonoras y luminosas se reflejan con ángulos de incidencia y de reflexión iguales; es decir, si un rayo de luz u onda sonora parte de uno de los focos y toca superficies elípticas, se reflejará en el otro foco. Esta propiedad es la base del fenómeno de la Galería de los murmullos, que consiste en que la conversación de dos personas que se encuentran cerca de un foco de un salón, con forma semielipsoide, pueden ser escuchadas por otra persona que se encuentra en el otro foco y aún cuando la conversación no fuese escuchada por otras personas en el mismo salón.

$$\tan\alpha = \tan\beta \iff \alpha = \beta$$



5.2. Propiedad de la normal a una elipse

La normal a una elipse en un punto T de la misma, es bisectriz del ángulo interior que forman los radios vectores T.

5.3. Propiedad de la tangente y el semieje menor

El producto de las distancias de los focos de una elipse a una tangente cualquiera a la curva es constante e igual al cuadrado del semieje menor.

$$\therefore \mathbf{d_1 \cdot d_2 = \frac{b^2(m^2+1)}{m_2+1} = b^2}$$

5.4. Propiedad de la construcción geométrica de la tangente a una elipse, dado el punto T(x_0 ; y_0) de la curva

Cuando una elipse está en su forma canónica nos permite ver que la relación es la misma cualquiera que sea la posición de sus ejes mayor y menor. Esta propiedad intrínseca describe la forma de la elipse sin referirse a los ejes coordenadas. Únase P con T y se tendrá la tangente pedida. La tangente a la elipse en T es:

$$\mathbf{\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1}$$

5.5. Propiedad intrínseca de la elipse

Constrúyase la circunferencia principal de centro O y radio a (semieje mayor de la elipse). Prolónguese la ordenada de T hasta T_1. Por T_1 construya una tangente a la circunferencia que cortará al eje mayor de la elipse en P. Por consiguiente, se puede emplear para hallar la ecuación de la curva en cualquier posición.

$$\frac{x'^2}{\mathbf{a^2}} + \frac{y'^2}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

¡Realicemos la valoración!

Actividad 35. Reflexionamos sobre la importancia de conocer los elementos de la elipse para entender cómo funcionan los recorridos de las órbitas de los planetas y cometas alrededor del Sol y también en la construcción de piscinas, puentes, mesas de billar, marco de fotografías u otros que tengan formas elípticas.

1) En tu contexto, ¿dónde ves la aplicación de la elipse?
2) Menciona la aplicación de la elipse en la medicina.
3) ¿Cómo puedes aplicar el método del albañil en la construcción?
4) La Tierra describe una órbita elíptica al girar alrededor del Sol, ocupando este la posición de uno de los focos. Si se sabe que el eje mayor de la elipse descrita mide $2{,}97\times10^8$ km y tiene excentricidad e=1/62, ¿cómo hallamos la máxima y la mínima distancia de la Tierra al Sol?
5) ¿Qué sucede cuando la Tierra se aleja del Sol?
6) ¿Qué sucede cuando la Tierra se acerca el Sol?
7) En una mesa de billar de forma elíptica. ¿Qué sucede con la bola de billar si empiezas jugando en un punto del foco?

Noticiencia

Piscina elíptica

8) Si estás dentro de un techo elíptico, ¿si te paras en el segundo foco puedes escuchar lo que hablan las personas en el otro foco y el resto de las personas que están a tu alrededor no lo pueden hacer?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Noticiencia

Mesa de billar en forma elíptica

Actividad 36.

1. Realizamos el método del albañil para la construcción de una piscina elíptica en el patio de la unidad educativa o en tu casa de acuerdo al tamaño de espacio que designes e identificamos los elementos de la elipse.
2. Encuadramos una foto con un marco con forma elíptica.
3. Con materiales del contexto construimos una mesa de billar elíptica e identificamos las propiedades de las elipse.

LA HIPÉRBOLA APLICADA A LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Luciana y Lucas vieron las fotografías del cometa Neowise cuando pasó por territorio boliviano. Estas fotografías fueron sacadas por el Observatorio Astronómico Nacional de Tarija, es llamó la atención el tiempo transcurrido desde el último paso del cometa y les permitió ver que, en el espacio sideral, los cometas pasan alrededor de una estrella, en este caso el Sol, son atraídos por su campo gravitacional describiendo una curva hiperbólica para luego alejarse.

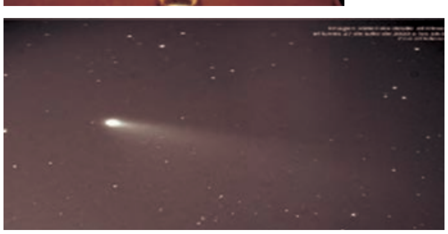
Actividad 37. Respondemos las siguientes preguntas.

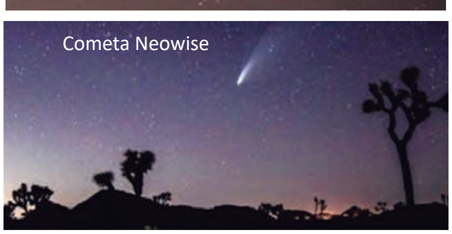
1. ¿Qué sucede cuando los cometas pasan alrededor del Sol?
2. ¿Qué cometa se acerca más al Sol?
3. ¿Por qué solamente se pueden ver los cometas cuando pasan cerca del Sol?
4. ¿Cuántos observatorios hay en Bolivia y en qué ciudad se encuentran?

Realicemos la siguiente práctica

Colocamos una lámpara paralela a la pared, el reflejo de su luz forma en la pared una perfecta hipérbola. Nosotros graficaremos esa figura a través del uso del compás.

Lámpara en la pared

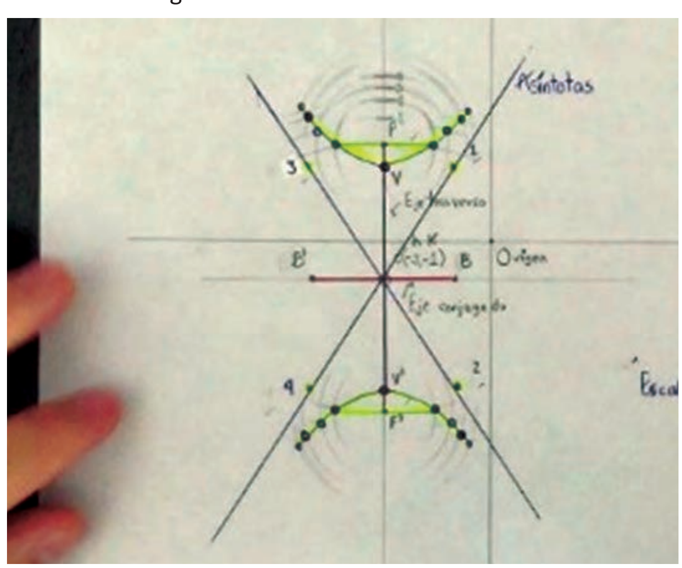




Cometa Neowise

Materiales:

- Una cartulina tamaño oficio.
- Compás.
- Colores / marcadores.
- Estuche geométrico.



¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición

Una hipérbola es el conjunto H de todos los puntos del plano colocados de tal forma que la diferencia de cada una de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Si denotamos la diferencia constante por 2a, tenemos que:

$P \in H \leftrightarrow |\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$. El segmento $|\overline{V_1V_2}| = 2a$, se denomina **eje transverso** o **eje focal**, y el segmento $|\overline{B_1B_2}| = 2b$, es el *eje conjugado o eje normal* de la hipérbola. La distancia entre los focos, o sea $|\overline{F_1F_2}| = 2c$, se denomina *distancia focal.*

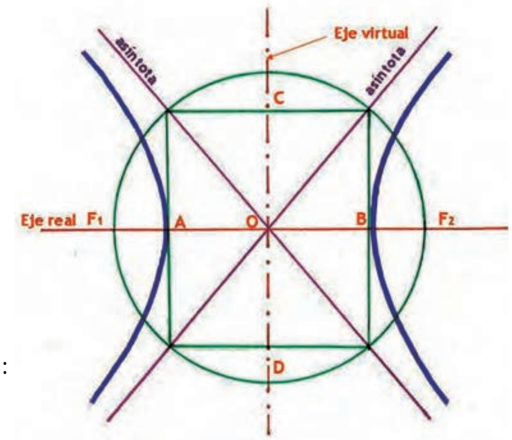


Figura 1: Hipérbola

2. Elementos de la hipérbola

Mencionaremos los siguientes elementos fundamentales de la hipérbola:

1. Focos: son los puntos fijos F_1 y F_2.
2. Eje focal, principal o real: es la recta que pasa por los focos.
3. Eje secundario o imaginario: es la mediatriz del segmento F_1 y F_2 .
4. Centro: es el punto de intersección de los ejes.
5. Vértices: V_1 y V_2 son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal.
6. Radios vectores: son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF_1 y PF_2.
7. Distancia focal: es el segmento $\overline{\mathbf{F_1F_2}}$ de longitud 2c.
8. Eje mayor: es el segmento $\overline{\mathbf{V_1}\boldsymbol{V_2}}$ de longitud 2a.
9. Eje menor: es el segmento $\overline{\mathbf{B_1B_2}}$ de longitud 2b.
10. Ejes de simetría: son las rectas que contienen al eje real o al eje imaginario.
11. Asíntotas: son las rectas oblicuas.
12. Relación entre los semiejes: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

2.1. La hipérbola con origen focal paralelo al eje X

1) Centro: C (h; k)
2) Vértice: V_1 (h + a; k) y V_2 (h - a; k)
3) Foco: F_1 (h + c; k) y F_2 (h - c; k)
4) Extremos del eje menor: (normal)
   B_1 (h; k + b), B_2 (h; k – b)
5) Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$
7) Extremos de los lados rectos:
   $L_1 (h + c; k + \frac{b^2}{a})$, $R_1 (h + c; k - \frac{b^2}{a})$
   $L_2 (h - c; k + \frac{b^2}{a})$, $R_2 (h - c; k - \frac{b^2}{a})$
8) Ecuaciones de las directrices: $x = h \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$
11) Radios vectores para un punto P $(x_1; y_1)$ de la Hipérbola: $r_1 = | ex_1 - a|$ (Foco derecho) y $r_2 = | ex_1 + a|$ (Foco izquierdo)

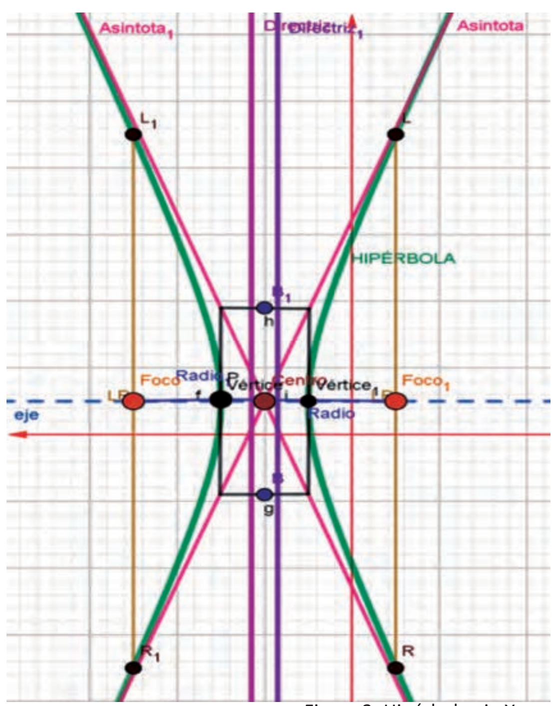


Figura 2: Hipérbola eje X

2.2. La hipérbola con origen focal paralelo al eje Y

1) Centro: C (h; k)
2) Vértices: V_1 (h; k + a), V_2 (h; k– a)
3) Focos: F_1 (h; k + c), F_2 (h; k – c)
4) Extremos del eje menor:
   B_1 (h + b; k), B_2 (h – b; k)
5) Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a} (e > 1)$
7) Extremos de los lados rectos:
   $L_1 \left(h + \frac{b^2}{a}; k + c\right)$, $R_1 \left(h - \frac{b^2}{a}; k + c\right)$
   $L_2 \left(h + \frac{b^2}{a}; k - c\right)$, $R_2 \left(h - \frac{b^2}{a}; k - c\right)$
8) Ecuaciones de las directrices: $y = k \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$
11) Radios vectores para un punto P (x_1; y_1) de la Hipérbola:
   $r_1 = | ey_1 - a|$ (Foco superior) y
   $r_2 = | ey_1 + a|$ (Foco inferior)

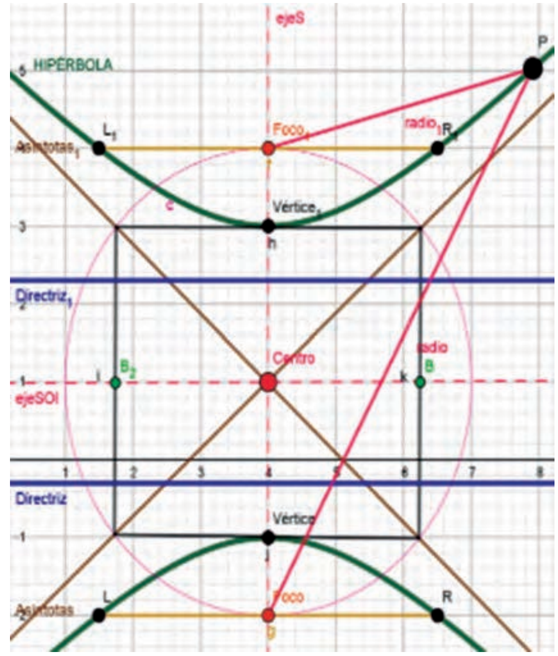


Figura 3: Hipérbola eje Y

3. Ecuaciones de la hipérbola

Ahora veremos las ecuaciones de una hipérbola en su forma más simple, esto es, cuando su centro está en el origen y su eje transverso coincide con uno de los ejes coordenados.

3.1. Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje transverso coincidente con el eje X

Esta primera forma canónica de la ecuación de la hipérbola se denomina, también hipérbola horizontal con centro en el origen.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

3.2.Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje transverso coincidente con el eje Y

Esta segunda forma canónica de la ecuación es llamada hipérbola vertical con centro en el origen. Las ecuaciones a y b reciben el nombre de formas canónicas ordinarias de la ecuación de una hipérbola.

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

3.3. Ecuación de la hipérbola con origen eje focal paralelo al eje X

Si trasladamos el sistema de coordenadas XY al sistema X'Y' de tal forma que el nuevo origen O' coincida con el centro C (h; k), obtenemos una hipérbola con centro en O' cuya ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

3.4. Ecuación de la hipérbola con origen eje focal paralelo al eje Y

Las ecuaciones c y d reciben el nombre de formas canónicas ordinarias de la ecuación de una hipérbola.

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

3.5. Ecuación general de una hipérbola en posición ordinaria

Una ecuación de segundo grado que carece del término XY, de la forma: $\mathbf{Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

$$\text{donde: } t = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \quad \rightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{t/_A} - \frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{t/_C} = 1$$

Entonces podemos afirmar que:
Si t > 0, la ecuación representa una hipérbola con eje real o transverso coincidente o paralelo al eje X.
Si t = 0, la ecuación representa dos rectas concurrentes.
Si t < 0, la ecuación representa una hipérbola con eje real o transverso coincidente o paralelo al eje Y.

Ejemplo 1.

Determinamos si la gráfica de las ecuaciones dadas es una hipérbola o un par de rectas concurrentes. Si es una hipérbola construir su gráfica y hallar sus elementos.

a) $\boldsymbol{9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 65 = 0}$

$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -65 + 81 - 16$

$9(x-3)^2 - 4(y+2)^2 = 0$

Como $t = 0$

$\therefore$ la ecuación representa dos rectas concurrentes

Esto es: $(y+2)^2 = \frac{9}{4}(x-3)^2$

$\mathbf{L_1: 3x - 2y - 13 = 0}$

$\mathbf{L_2: \ 3x + 2y - \ 5 = 0}$

b) $\boldsymbol{16x^2 - 9y^2 + 96x + 36y + 252 = 0}$

$16(x^2 + 6x + 9) - 9(y^2 - 4y + 4) = -252 + 144 - 36$

$16(x+3)^2 - 9(y-2)^2 = -144$

$9(y-2)^2 - 16(x+3)^2 = 144$

$\varepsilon: \frac{\mathbf{(y-2)^2}}{\mathbf{16}} - \frac{\mathbf{(x+3)^2}}{\mathbf{9}} = \mathbf{1}$

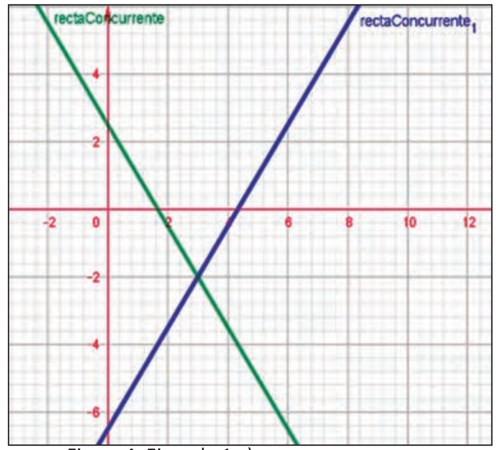


Figura 4: Ejemplo 1 a)

Elementos de la hipérbola:

1) $C(-3{,}2)$
2) $V_1(-3;6)$, $V_2(-3;-2)$
3) $F_1(-3;7)$, $F_2(-3;-3)$
4) $B_1(0;2)$, $B_2(-6;2)$
5) $LR = 4.5$
6) $e = 1.250$
7) $L_1(-0.750;7)$, $R_1(-5.250;7)$
 $L_2(-0.750;-3)$, $R_2(-5.250;-3)$
8) $y = 5.2$, $y = -1.2$
9) $d_{L_1 \to L_2} = 6.4$
10) $y - 2 = \pm\frac{4}{3}(x+3)$
 $L_1: 4x - 3y + 18 = 0$
11) $L_2: 4x + 3y + 6 = 0$
12) $r_1 = |1.250y_1 - 4|$, $r_2 = |1.250y_1 + 4|$

$\mathbf{h = -3, \ k = 2}$

Relación de distancia

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

$\mathbf{c^2 = 16 + 9}$

$\mathbf{c = \sqrt{25}}$

$\mathbf{c = 5}$

$\mathbf{a = 4, \ b = 3}$

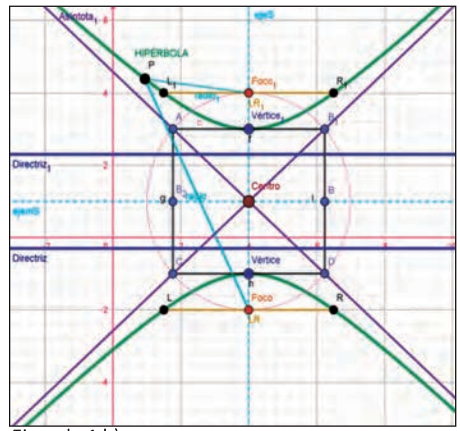


Figura 5: Ejemplo 1 b)

Ejemplo 2. Identificamos los valores de “a” y “b” de la siguiente hipérbola y encuentra su ecuación.

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$\frac{(x-7)^2}{4^2} - \frac{(y-6)^2}{3^2} = 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}: \frac{\mathbf{(x-7)^2}}{\mathbf{16}} - \frac{\mathbf{(y-6)^2}}{\mathbf{9}} = \mathbf{1}$

$\frac{\mathbf{(x-7)^2}}{\mathbf{16}} - \frac{\mathbf{(y-6)^2}}{\mathbf{9}} = \mathbf{1}$ // (144)

$9(x-7)^2 - 16(y-6)^2 = 144$

$9(x^2 - 14x + 49) - 16(y^2 - 12y + 36) - 144 = 0$

$9x^2 - 126x + 441 - 16y^2 + 192y - 576 - 144 = 0$

$\boldsymbol{\varepsilon: 9x^2 - 16y^2 - 126x + 192y - 279 = 0}$

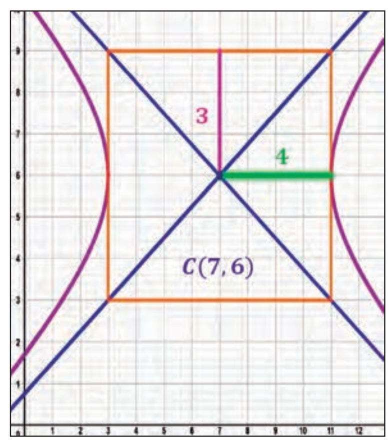


Figura 6: Ejemplo 2

Ejemplo 3. Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$, hallamos su ecuación en la forma general.

$\frac{\overbrace{144}^{4} * x^2}{\underbrace{36}_{1}} - \frac{\overbrace{144}^{9} * y^2}{\underbrace{16}_{1}} = 144 * 1$

$4x^2 - 9y^2 = 144$

$\boldsymbol{\varepsilon: 4x^2 - 9y^2 - 144 = 0}$

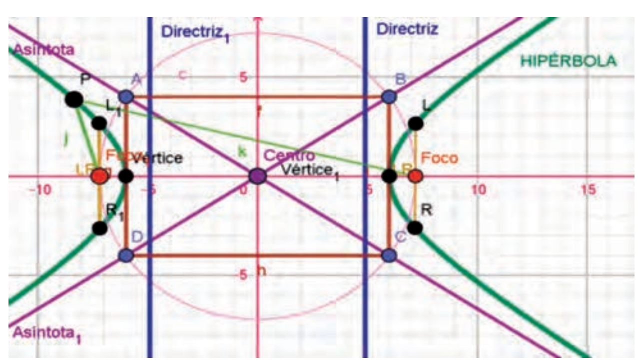


Figura 7: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Hallamos la ecuación de la hipérbola cuyos focos son F_1 (7; - 5) y F_2 (- 3: - 5), y un extremo del eje conjugado es B (2; -3).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$2c = d(\overline{F_1F_2})$

$2c = \sqrt{(-3-7)^2+(-5+5)^2}$

$2c = \sqrt{100}$

$2c = 10$

$c = 5$

$C(h,k)$ Es punto medio del segmento.

$\overline{F_1F_2} \Rightarrow C(2,-5)$

$b = d(\overline{CB})$

$b = \sqrt{(2-2)^2+(-3+5)^2}$

$b = \sqrt{4}$

$b = 2$

Relación de distancia

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

$25 = a^2 + 4$

$a^2 = 25 - 4$

$a^2 = 21$

∴ La ecuación ordinaria de la hipérbola es:

$$\varepsilon:\ \frac{(x-2)^2}{21}-\frac{(y+5)^2}{4}=1$$

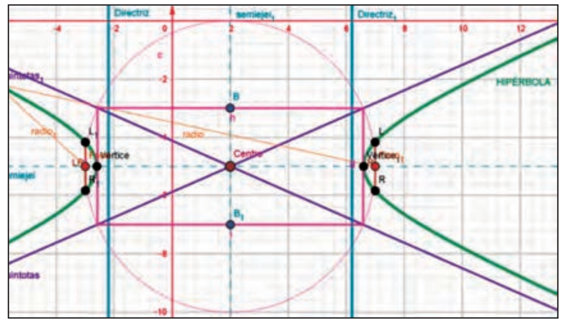


Figura 8: Ejemplo 4

$$\varepsilon:\ \frac{84\,(x-2)^2}{21}-\frac{84\,(y+5)^2}{4}=1*84$$

$4(x-2)^2-21(y+5)^2=84$

$4(x^2-4x+4)-21(y^2+10y+25)-84=0$

∴ La ecuación general de la hipérbola es:

$$\varepsilon:\ 4x^2-21y^2-16x-210y-593=0$$

Ejemplo 5. Los focos de la elipse $25x^2 + 9y^2 = 225$ coinciden con los focos de una hipérbola de excentricidad 4/3. Hallamos la ecuación de la hipérbola.

Ecuación de la elipse

si: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$

$a = 5$, $b = 3$

Ecuación de la hipérbola

$\varepsilon:\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Se tiene: $F(0, \pm c)$

$\Rightarrow c = 4$

$e = \frac{c}{a} \rightarrow \quad \frac{4}{3}=\frac{4}{a}$

$a = 3$

Luego, la ecuación de la hipérbola es:

$\varepsilon:\ \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

$\frac{63y^2}{9}-\frac{63x^2}{7}=63\cdot 1$

$7y^2-9x^2=63$

Relación de distancia de la elipse

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

$c^2 = 25 - 9$

$c^2 = 16$

$c = 4$

Relación de distancia de la hipérbola

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

$16 = 9 + b^2$

$b^2 = 16 - 9$

$b^2 = 7$

∴ La ecuación general la hipérbola es:

$$\varepsilon:\ 7y^2-9x^2-63=0$$

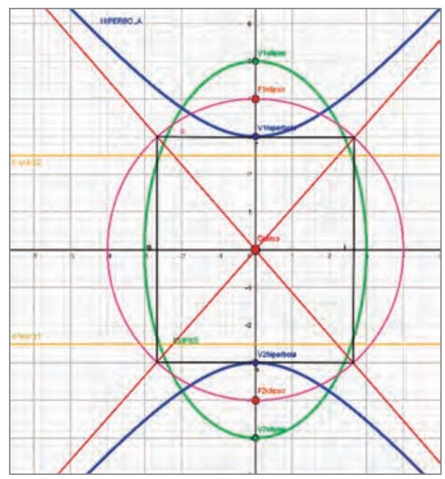
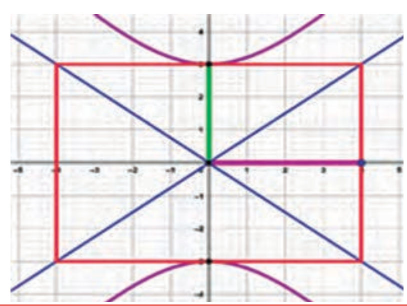


Figura 9: Ejemplo 5

Actividad 38. Determinamos si la gráfica de las ecuaciones dadas es una hipérbola o un par de rectas concurrentes. Si es una hipérbola, construir su gráfica y hallar sus elementos.

1) $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$
2) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y + 20 = 0$
3) $x^2 - 4y^2 - 6x + 9 = 0$
4) $16x^2 - 9y^2 + 32x + 72y - 704 = 0$

Actividad 39. Identificamos los valores de "a" y "b" de la siguiente hipérbola y encuentra su ecuación.



Actividad 40. Dada la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(x-7)^2}{64}-\frac{(y-6)^2}{36}=1,$$

Calcula su ecuación en la forma general.

Actividad 41. Hallamos la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse $\varepsilon: 16x^2+25y^2=1.600$ y las directrices pasan por los focos de la elipse.

4. Ecuaciones tangentes a una hipérbola

Como la ecuación de una hipérbola es de segundo grado, sus tangentes pueden obtenerse empleando la condición de tangencia (método optativo) o el método para hallar la ecuación de la tangente a una elipse (tangentes al origen).

Empecemos entonces a determinar sus ecuaciones considerando los tres problemas de tangencia estudiados para la parábola y la elipse.

4.1. Ecuación de la tangente en un punto de contacto dado

Hipérbola	Tangente
$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon: \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1:$
$\varepsilon: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon: \frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_0-h)(y-h)}{b^2} = 1$
$\varepsilon: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon: \frac{(y_0-h)(x-k)}{a^2} - \frac{(x_0-h)(x-h)}{b^2} = 1$
$\varepsilon: Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	$\varepsilon: Ax_0x - Cy_0y + \frac{D}{2}(x_0 + x) + \frac{E}{2}(y_0 + y) + F = 0$

Ejemplo 6. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la tangente y normal a la hipérbola ε:x²-3y²=9 en el punto T(-6;3).

$$\varepsilon: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Dónde:

$a^2 = 9 \quad , \quad b^2 = 3$

$x_0 = -6 \ , \ y_0 = 3$

Como $T \in \varepsilon$

<u>Ecuación de la tangente en un punto de contacto</u>

$$\boldsymbol{\varepsilon: \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Sustituimos:

$$\varepsilon: \frac{-6x}{9} - \frac{3y}{3} = 1$$

$$-\frac{2}{3}x - y = 1 \ \ \text{multiplicamos}(-3)$$

$$2x + 3y = -3$$

$$\therefore \mathbf{L_T: 2x + 3y + 3 = 0}$$

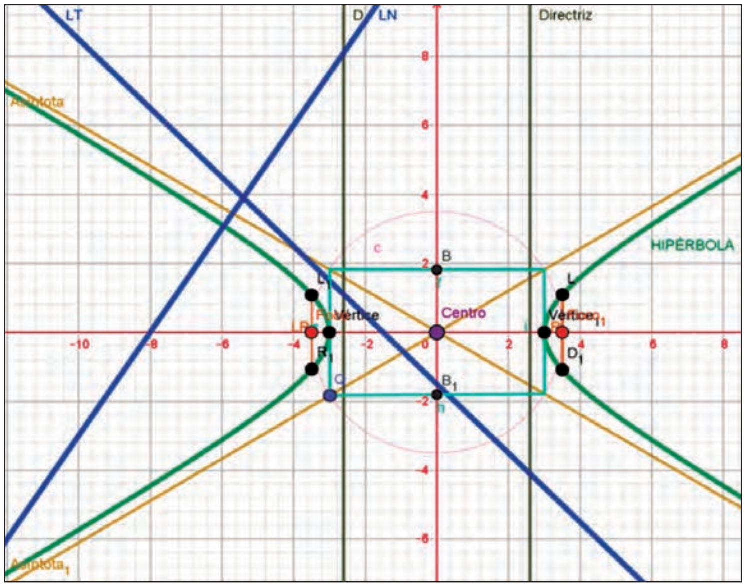


Figura 10: Ejemplo 6

<u>Ecuación de la normal</u>:

$$\mathbf{y - x_1 = m(x - y_1)}$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x + 6) \ \ \text{multiplicamos}(2)$$

$$2y - 6 = 3x + 18$$

$$\therefore \ \mathbf{L_N = 3x - 2y + 24 = 0}$$

Actividad 42.

> Halla y grafica la ecuación de la tangente y normal a la hipérbola
>
> $\boldsymbol{\varepsilon: 3x^2 - y^2 - 12x + 2y = 0}$ en el punto $T(4; 2)$.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 43. Investiguemos sobre el Observatorio Astronómico Nacional de Tarija y respondemos las siguientes preguntas.

1) ¿Qué observatorios astronómicos existen en Bolivia?
2) ¿Dónde está el mayor observatorio astronómico del mundo?
3) ¿Cómo se realiza el astro turismo en Bolivia?
4) ¿Dónde se pueden ver las estrellas en Bolivia?

En tu contexto, ¿qué aplicaciones tiene la hipérbola en la vida cotidiana?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 44. Realizamos las siguientes actividades:
1) Construimos un reloj solar similar al de la Casa de Moneda de la ciudad de Potosí, con una determinada latitud y altitud. Y así ver el comportamiento de la curva hiperbólica.

2) Cuando los científicos lanzan un satélite al espacio, los sistemas de satélites hacen uso de las hipérbolas y las funciones hiperbólicas, investiga como.

TEORÍA DE CONJUNTOS EN SITUACIONES CONCRETAS DE LA COMUNIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

La trata y tráfico de menores son delitos de los cuales muchos niños y niñas son víctimas y no lo saben. Julia tiene 45 años, sus padres la entregaron a una familia cuando tenía 4 años, no contaba con certificado de nacimiento, no recibía pago alguno por los servicios prestados y no accedió a una educación libre y gratuita.

Trata y tráfico de menores
- Niños en las Fuerzas Armadas
- En el tráfico de drogas
- Adopción ilegal
- Mendicidad forzada
- Explotación sexual
- Casamiento forzado
- Venta de niños
- Venta de órganos
- Trabajo forzado
- Pornografía
- Desnaturalización de la identidad

A sus 10 años le pedían "llevar harina" de un lugar a otro, en el transcurso debía esquivar el control policial escondiéndose en camiones y en muchas ocasiones caminaba bajo la lluvia en plena carretera. A sus 13 años escapó del lugar y llegó a la ciudad, comenzó vendiendo dulces en las ferias; gracias al contacto con las vendedoras se dio cuenta que podía estudiar y conseguir el bachillerato, así consiguió terminar el colegio.

No se rindió ante las adversidades, actualmente es juez de familia, de la niñez y adolescencia. Nos cuenta que fue víctima de una intersección de delitos y que su preocupación es que existen muchos niños y niñas pasan por el mismo problema o peores.

Actividad 45. Respondamos las siguientes preguntas:

¿Cómo ayudan los conjuntos a entender la realidad que viven las personas? ¿Cómo tomar decisiones frente a problemáticas como la de Julia?

¿Qué otros conjuntos de problemas se presentan en la realidad que existen en las calles? ¿Qué tan importante es conocer los conjuntos para entender la realidad?

Estas situaciones describen intersecciones, uniones y otras operaciones entre conjuntos que son importantes reconocerlas y estudiarlas matemáticamente para dar solución a problemas de esta índole.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición

El álgebra de conjuntos es un área de estudio dentro de las matemáticas y la lógica, enfocada en las operaciones que pueden efectuarse entre los conjuntos.

2. Agrupamiento de elementos

El agrupamiento de elementos consiste en la repartición de un total de elementos entre un número definido de grupos, generalmente del mismo tamaño, de tal manera que se satisfaga una cierta condición. El álgebra de conjuntos forma parte de la teoría de conjuntos. Cabe recordar que un conjunto es la agrupación de elementos de distinta índole, como pueden ser letras, números, símbolos, funciones, figuras geométricas, entre otros.

3. Notación de conjuntos numéricos

Un conjunto o colección está formado por unos elementos de la misma naturaleza; es decir, elementos diferenciados entre sí pero que poseen en común ciertas propiedades o características y que pueden tener ciertas relaciones entre ellos o con los elementos de otros conjuntos.

Un conjunto puede tener un número finito o infinito de elementos, en matemáticas es común denotar a los elementos mediante letras minúsculas y a los conjuntos por letras mayúsculas. Se usan corchetes para representar y definir conjuntos. En el interior de los corchetes se ubican los elementos que conforman el conjunto, separados por comas o puntos y comas. Esta representación escrita es equivalente a la representación gráfica de diagramas de Venn. Así por ejemplo: C={a,b,c,d,e,f,g,h}.

4. Determinación de conjuntos por extensión y comprensión

Un conjunto se determina por extensión cuando se enumera, mientras un conjunto se determina por comprensión, cuando se da una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto.

4.1. Método por extensión

Se define un conjunto por extensión cuando se enumeran todos y cada uno de los elementos que lo constituyen. Un conjunto está determinado por la extensión, si y solo si se nombra todos los elementos que lo constituyen, por ejemplo: A = {1,2,3,4,5,6.}

4.2. Método por comprensión

Se define un conjunto por comprensión cuando se enuncia una propiedad común que caracteriza a los elementos de dicho conjunto. Un conjunto está determinado por comprensión, si y solo sí se dan las propiedades que caracterizan a los elementos del conjunto.

Ejemplo 1. Determinamos el conjunto A por comprensión y por extensión.

Por comprensión

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in / \mathrm{N} < 7\}$

Por extensión

$\mathrm{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Ejemplo 2.

Determinamos el conjunto A por comprensión y por extensión :

Por comprensión

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in / 3 \leq \mathrm{x} < 8\}$

Por extensión

$\mathrm{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Actividad 46.

Determinamos los conjuntos por extensión:

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in Z / \mathrm{x}^2 = 4\mathrm{x}\}$

$\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \in Z / (x+1)^2 = 4\}$

$\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \in N / (x+1)^2 = 4\}$

$\mathrm{C} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} / \sqrt{4-3x} + 3 = 2\mathrm{x}\right\}$

5. Conjuntos especiales: unitario, vacío, universal

Se llama conjuntos especiales a aquellos conjuntos que se caracterizan por el número de elementos; entre ellos tenemos los conjuntos: Unitario, Vacío y Universal.

5.1. Conjunto unitario

Es aquel que tiene un solo elemento. A continuación, vemos un ejemplo. **Ejemplo:** A = $\{x \in N / x^2 = 16\}$ ⇒ A = $\{4\}$

5.2. Conjunto vacío

Es aquel que no tiene elementos, es subconjunto de todo conjunto. Se le representa por: $\{1\}$ y se denota por el símbolo: ∅. Es decir: $\{x/x \ ; \neq x\} = \{1\} = \emptyset$. A continuación, vemos un **ejemplo:** $\{x/x \ \in \mathbb{N}; 9 < x < 10\} = \{1\}$

5.3. Conjunto Uuiversal “U = Ω”

Es un conjunto referencial que contiene a todos los conjuntos considerados y se le denota generalmente por “U”. A continuación, vemos un ejemplo donde denotamos la “U” para los siguientes conjuntos:

6. Relación entre conjuntos

Las relaciones de conjuntos suceden cuando existen ciertos conjuntos que tiene algo en común y que cumple una propiedad específica en común. La relación de conjuntos no es más que una comparación entre conjuntos según las cualidades que le asignemos, si es que existen. A continuación, vemos su clasificación por inclusión, no inclusión y por igualdad de conjuntos.

Inclusión

En la inclusión de conjunto, un determinado conjunto A está dentro de otro conjunto B; por lo tanto, A es un subconjunto de B o A está incluido en B. A continuación, veamos un ejemplo de inclusión de conjuntos:

Ejemplo: A = $\{1, 2, 3\}$ B = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ Se dice A ⊂ B

Sea A y B dos conjuntos; se dice que A está incluido en B o A es un subconjunto de B si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B, se denota A ⊂ B , y se lee A esta incluido en B, B incluye a A es subconjunto de B. A ⊂ B ↔ $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$

No inclusión

La no inclusión se da cuando el conjunto A no está contenido en B; o no es un subconjunto de B. A continuación, veamos un ejemplo de No inclusión de conjuntos:

Ejemplo: A = $\{2; 4; 6; 8\}$ B = $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ Se dice $B \not\subset A$. Sea A y B dos conjuntos, se dice que A no está incluido en B o que A no pertenece al conjunto B, se denota A ⊄ B y se lee A no está incluido en B; B no incluye A o bien A no es subconjunto de B.
A ⊄ B ↔ $\exists x : x \in / A \leftrightarrow x \in B$

Igualdad de conjuntos

La igualdad de conjuntos es dada por dos conjuntos cualesquiera, A y B, que son iguales y lo anotaremos como A=B. A continuación, veamos un ejemplo de igualdad de conjuntos:

Ejemplo: A = $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ B = $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, \}$ Se dice $A = B$. Los dos conjuntos, A y B, son iguales.

Si A ⊂ B y B ⊂ A, ambos conjuntos están formados por los mismos elementos. A = B ↔ $\forall X : x \in / A \wedge x \in B$

Actividad 47.

Indicamos en los siguientes incisos la inclusión ⊂ o la No inclusión ⊄ de los siguientes conjuntos:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$B = \{1; 4; 5; 7\}$

$C = \{2; 4; 6\}$

$D = \{1; 5\}$

a) C.........A
b) B.........D
c) C.........D
d) E.........D
e) A.........C
f) D.........A

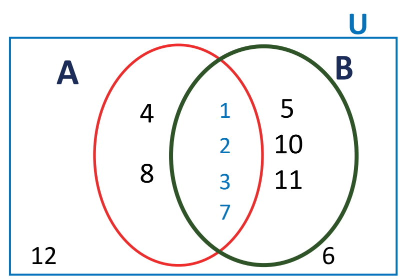
7. Operaciones entre conjuntos

La unión entre los conjuntos A y B es un conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o B. se denota. A U B = $\{x/x\ A\ v\ x \in B\}$. A continuación, veamos un ejemplo de unión de conjuntos.

7.1. Unión de conjuntos

Las operaciones con conjuntos nos permiten obtener otro conjunto. De ellas veremos las siguientes: unión, intersección, complemento de conjuntos y diferencia de conjuntos.

Ejemplo 2:
U = $\{x/x \in N < 13\}$
A = $\{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$
B = $\{1; 2; 3; 5; 7, 10; 11\}$
A U B = $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$



7.2. Intersección de conjuntos

La intersección entre dos conjuntos (A, B) es un nuevo conjunto integrado por todos los elementos que pertenecen tanto al conjunto A y como al conjunto B. A ∩ B = $\{x/x \in A \wedge x \in B\}$. A continuación, veamos un ejemplo de intersección de conjuntos.

Ejemplo 3: del Ejemplo 2 (Diagrama de Venn)
U = $\{x/x \in N < 13\}$
A = $\{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$ B = $\{1; 2; 3; 5; 7, 10; 11\}$
A ∩ B = $\{1; 2; 3; 7\}$

Actividad 48.

Hallamos la unión e intersección de los siguientes conjuntos (Diagrama de Venn):

$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$, $A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{7; 8; 9\}$

También el complemento del conjunto si:

U= $\{x/x \in N < 10\}$

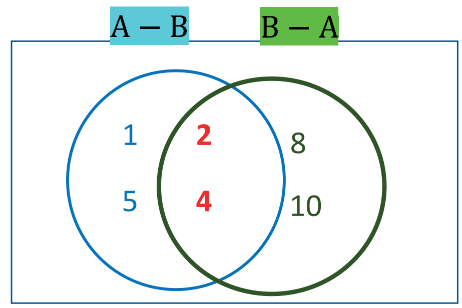
7.3. Complemento de un conjunto

El complemento de un conjunto ($\mathbf{A}^{C}$)es un nuevo conjunto formado por todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto original A. Ahora veamos un ejemplo de complemento de un conjunto.

Ejemplo 4: del ejemplo 2 (Diagrama de Venn)

7.4. Diferencia de conjuntos

La diferencia de conjuntos A – B (A menos B) es un conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. A continuación, veamos ejemplos.



Ejemplo 5:

$A - B = \{x/x \in A \ \wedge x \notin B\}$

Sean: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $\quad B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$A - B = \{1; 3; 5\}$ $\quad B - A = \{8; 10\}$

Ejemplo 6

Hallar la unión e intersección e indicar la inclusión si A ⊂ B o la No inclusión ⊄ de los siguientes conjuntos (Diagrama de Venn):

$A \cup B = \{x/x \ \in A \ \vee x \in B\}$

$A = \{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$

También el complemento del conjunto si:

Ejemplo 7

$U = \{x/x \ \in N < \ 13\}$

<u>Unión de conjuntos</u>

$AUB = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$

<u>Intersección de conjuntos</u>

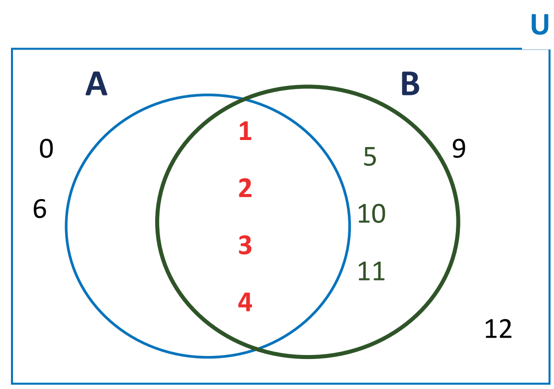
$A \cap B = \{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$

<u>Complemento de conjuntos</u>

$U^{c} = \{0; 6; 9; 12\}$

<u>Inclusión</u>

$A \subset B = \{\text{VERDADERO}\}$



8. Leyes de operaciones con conjuntos

NOMBRE	INTERSECCIÓN	UNIÓN
IDEMPOTENCIA	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
ASOCIATIVA	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
CONMUTATIVA	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
IDENTIDAD	$A \cap A = \emptyset$	$A \cup A = \emptyset$
COMPLEMENTO	$A \cap \hat{A} = \emptyset$, A ∩U=A , ∅ =U	$A \cap \hat{A}$ =U , U= ∅
DE MORGAN	$(A \cap B) = (\hat{A} \cup \hat{B})$	$(A \cup B) = (\hat{A} \cap \hat{B})$
SIMPLIFICACIÓN	$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{A}) = \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{A}) = \mathbf{A}$
INVOLUTIVA	$\hat{A} = A$	
DIFERENCIA RELATIVA	$A - B = A \cap \hat{B}$, $A - B = \hat{B} - \hat{A}$	

9. Cardinalidad y problemas

Como ya hemos estudiado antes, los conjuntos finitos son los que tienen "unos pocos" elementos, más concretamente, son tales que podemos contar los elementos que tiene. El cardinal de un conjunto finito A es el número de elementos que tiene dicho conjunto. A ese número lo denotaremos por | A |.

No es difícil llegar a que, si tenemos dos conjuntos A y B, entonces: |AUB|=|A|+|B|-|A∩B|

A Δ B = (A – B) U (B – A). Veamos un ejemplo:
U = $\{x/x \in N < 14\}$
A = $\{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$
B = $\{1, 2, 4, 6, 10\}$
A – B = $\{3, 5, 7, 9\}$
B – A = $\{1, 6\}$

10. Aplicación de la teoría de conjuntos en problemas cotidianos

La idea de agrupar objetos de la misma naturaleza para clasificarlos en “colecciones” o “conjuntos” es parte de la vida diaria de los seres humanos. Por ejemplo, el conjunto de libros de una biblioteca, el conjunto de árboles en un terreno, el conjunto de zapatos en un negocio de venta al público, el conjunto de utensilios en una cocina, etc. En todos estos ejemplos, se utiliza la palabra conjunto como una colección de objetos.

¡Realicemos la valoración!

Actividad 49. Analicemos la historia de Julia, respondemos las preguntas y resalizamos las actividades descritas: Actualmente el despacho de Julia es muy concurrido por diferentes personas, en alguna ocasión llegó un caso en el que un grupo de tres hermanos describía una situación así:

1. El hermano mayor, de 12 años, era forzado a vender cierto tipo de medicamento con fecha caduca, como si fueran caramelos comunes y no contaba con identificación.
2. La hermana del medio, de 9 años de edad, también era forzada a vender el mismo tipo de “caramelos” y sí contaba con identificación legal.
3. Con ellos estaba un menor de 6 años, el más pequeño, quien pedía limosna en la esquina donde todos se encontraban. Julia se identifica con este caso pues los niños, al igual que ella de niña, se encuentran en una intersección de ciertos conjuntos descritos por los delitos en los que incurren.
4. Según la experiencia contada por Julia, ¿cómo se ven los conjuntos en tu contexto?
5. ¿Qué utilidad y aplicación tiene la teoría de conjuntos en nuestro diario vivir? ¿Por qué?
6. Analicemos en grupos por qué y cómo aplicamos las definiciones y tipos de conjuntos en nuestra unidad educativa.
7. Desde tu percepción, menciona 10 utilidades y aspectos sobresalientes que tiene la aplicación de los conjuntos en la vida.

¡Es hora de la producción!

Actividad 50. Realicemos las siguientes actividades:

1) Un informe sobre las características de los conjuntos vinculados a la trata y tráfico en tu comunidad, barrio o unidad educativa.

2) Elaboremos una propuesta para generar espacios de discusión, reflexión y toma de decisiones, invitando a organizaciones como padres de familias y a algunas autoridades de nuestra comunidad para prevenir los casos de trata y tráfico de menores. Utilicemos:

- Mapas conceptuales
- Estudios estadísticos
- Diagramas de Venn
- Otros

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Bajo la consigna “ni una menos” se generaron varias movilizaciones, no sólo en nuestro país sino en nuestra región latinoamericana, debido al incremento de la violencia contra la mujer, cuyos índices se elevaron de sobremanera durante los últimos años.

“La violencia contra las mujeres es una violación de derechos humanos, y un problema de salud pública que afecta a todos los niveles de la sociedad en todas las partes del mundo. Desde niñas hasta mujeres mayores, una de cada tres mujeres es golpeada, forzada a tener relaciones sexuales, o abusada de otra manera en su vida. Estudios de la OMS muestran que la violencia por parte de una pareja íntima es la forma más común de violencia contra mujeres en el mundo.” (https://www.paho.org/es/temas/violencia-contra-mujer).

La iniquidad de género y la discriminación son las causas raíces de la violencia contra la mujer, influenciada por desequilibrios históricos y estructurales de poder entre mujeres y hombres existentes en variados grados a lo largo de todas las comunidades en el mundo.

Cada uno de nosotros tiene la responsabilidad de evitar la violencia y de denunciarla, si se tiene conocimiento de que ocurre. Revisa los datos de la frecuencia de casos de feminicidio según año y departamento.

Prevención de Violencia contra la mujer Modulo Educativo Angelina Ribera II Santa Cruz - Bolivia

Departamento	2016		2017	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Pando	1	1	0	0
Beni	3	3	4	4
Cochabamba	27	25	29	27
La Paz	28	27	28	25
Santa Cruz	21	20	17	15
Chuquisaca	5	5	10	9
Oruro	6	6	8	7
Tarija	5	5	8	7
Potosí	8	8	7	6
TOTAL	104	100	111	100

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Notaciones y definiciones

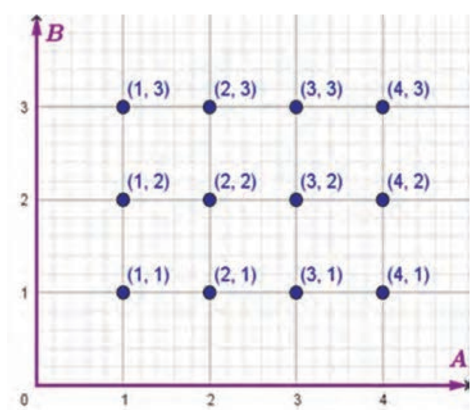
Recordemos algunos conceptos:

- Par ordenado o dupla, se denota como (a,b), donde “a” es el primer elemento del par y “b” es el segundo, también llamados componentes.

- Producto cartesiano de dos conjuntos A y B, es el conjunto A x B, formado por todos los pares ordenados (a, b), donde a es un elemento de A y b es un elemento de B.

- Relación entre dos conjuntos es el subconjunto de AxB, cuyos elementos cumplen una condición llamada regla de correspondencia, donde a cada elemento del primer conjunto A, le corresponde uno o más elementos del segundo conjunto B; se escribe como: R:A→B

- Regla de correspondencia, es la que establece la forma en que los elementos del primer conjunto A, se relacionan con él o los elementos, del segundo conjunto B, puede representarse de diversas maneras: por diagramas de Venn, en una tabla de valores, explícita o implícitamente.



Por ejemplo: si tenemos los conjuntos A={1,2,3,4} y B={1,2,3}.

Al realizar el producto cartesiano de dos conjuntos A y B, obtenemos diferentes pares ordenados. (Figura 1):

A×B= {(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)}. Si en este conjunto de pares ordenados surge una relación, que tiene por regla de correspondencia: "la suma de los componentes es igual a cuatro", se obtendría un subconjunto, cuyos elementos son: R= {(1,3),(2,2),(3,1)}. El nuevo conjunto que surge, tiene sólo tres pares ordenados, que cumplen con la consigna dada, se escribe a R b, "*a* se relaciona con b", en diagramas de Venn:

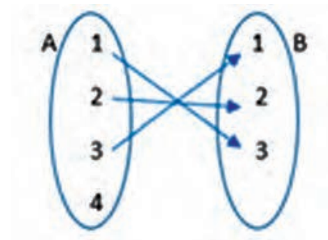
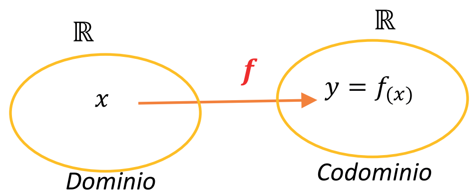


Figura 1: Pares ordenados del producto cartesiano AxB.

2. Relaciones y funciones

A partir del ejemplo anterior, podemos definir una función como una relación entre dos conjuntos, un conjunto de partida llamado dominio y otro conjunto de llegada llamado codominio, que se definen con una regla de correspondencia, tal que no existen pares ordenados con la misma primera componente. Una función se denota con letras minúsculas: f, g o h; tenemos: f:A→B, la regla de correspondencia es: "la suma de los componentes es igual a cuatro", entonces, si las componentes son (x,y), resulta en notación de función: y=f_((x)). Tenemos: forma implícita de regla de correspondencia: x+y=4. Forma explícita de regla de correspondencia: y=4-x. Una función queda bien definida si se conocen su dominio y la regla de correspondencia, así tenemos: f:A→B ; f_((x))=4-x.

Una función real de variable real es aquella en la que el dominio y codominio son los números reales, es decir parte de un conjunto numérico y llega a un conjunto numérico, se escribe:
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\,;\, y=f_{(x)}$ en notación de conjunto tenemos:
$f=\{(x,y)/x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R};\ y=f_{(x)}\}$.



El primer conjunto de números reales es el dominio que tiene como elementos las variables independientes, el segundo conjunto de números reales es el codominio cuyos elementos son denominados variables dependientes, ya que su valor está en función de "x", gráficamente el dominio se representa en el eje X y el segundo conjunto en el eje Y.

3. Dominio y rango de una función

El dominio de una función real de variable real es el conjunto de variables independientes para los cuales la función queda bien definida, se escribe: D_f. El rango de una función real de variable real, es el subconjunto del codominio que se obtiene al aplicar la regla de correspondencia y determinar variables dependientes que intervienen en la función, se escribe: R_f, podemos determinar el dominio y el rango de una función, establecemos tres parámetros principales, es decir debemos evitar que las variables intervengan en una división entre cero, raíz par de número negativo y logaritmos de números negativos.

Ejemplos: Determinar el dominio y rango de la función, definida por: 1) $f_{(x)}=\frac{2x-1}{x-2}$

Determinamos D_f: Observamos que en la regla de correspondencia $f_{(x)}=\frac{2x-1}{x-2}$, existe una división, por lo tanto, debemos evitar que la variable independiente "x", asuma valores que anulen el denominador, para evitar esta situación, se iguala el denominador a cero, es decir: $x-2=0$, se obtiene $x=2$; lo que indica que la variable puede tomar todos los valores reales, excepto el número dos, en símbolos tenemos: $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

Determinamos R_f: Determinamos el rango de la función, en $y=f_{(x)}$, tenemos: $y=\frac{2x-1}{x-2}$, como en el rango de la función están las variables dependientes, es decir las "y", entonces en esta expresión $y=\frac{2x-1}{x-2}$, despejamos la variable x, después observaremos las restricciones para "y":

$$y=\frac{2x-1}{x-2}$$
$$y(x-2)=2x-1$$
$$xy-2y=2x-1$$
$$xy-2x=2y-1$$
$$x(y-2)=2y-1$$
$$\boldsymbol{x=\frac{2y-1}{y-2}}$$

$$2)\ f_{(x)}=\sqrt{x^2-5x-6}$$

Determinamos Df: Observamos que la variable "x" interviene en una raíz par, entonces recordemos que una raíz par está definida para radicandos mayores o iguales a cero, entonces tenemos: $x^2-5x-6\geq0$, factorizando $(x-6)(x+1)\geq0$. Resolviendo la inecuación cuadrática, resulta: Cs=(-∞,-1] U[6,∞)

Concluimos el dominio de la función es: Df=(-∞,-1] U [6,∞).

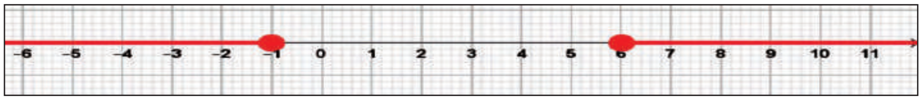


Figura 2: *Representación gráfica de intervalos solución de la inecuación cuadrática*: $x^2 - 5x - 6 \geq 0$:

- *Determinamos* R_f: En la regla de correspondencia igualamos a "y":

$y = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$, Despejamos la variable *x*:

$y^2 = x^2 - 5x - 6$

$x^2 - 5x - 6 - y^2 = 0$

$x^2 - 5x - (6 + y^2) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

Analizamos el discriminante:

$b^2 - 4ac \geq 0$

$(-5)^2 - 4(1)(-6 + y^2) \geq 0$

$y^2 + 49 \geq 0$

Actividad 51.

De acuerdo al análisis de la practica realizamos las siguientes actividades:

1) En tu opinión cuales son las principales causas para que se generen situaciones de violencia contra la mujer.

2) De acuerdo a lo que escribiste en el numeral anterior, cuáles son las reacciones que propones para evitar situaciones de violencia contra la mujer.

3) Con los datos del cuadro elabora un gráfico en un sistema de coordenadas, en el eje horizontal los nombres de los departamentos y en el eje vertical los porcentajes de los años 2016 con un color y 2017 con otro color diferente. Posteriormente, extrae conclusiones a través de la gráfica realizada, obtuviste una recta o una curva, ascendente o decreciente.

Actividad 52.

1) Elabora una tabla de valores para la función $f_{(x)} = \frac{2x-1}{x-2}$, considerando el dominio y el rango determinados en el ejemplo 1.

2) Establece una tabla de valores para la función $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$, considerando los intervalos del dominio de la función.

3) Determinamos el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = -3x + 5$

b) $f_{(x)} = -x^2 + 4$

c) $f_{(x)} = \frac{1}{2x} - 2$

d) $f_{(x)} = \sqrt{5 + x}$

e) $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

f) $f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$

g) $f_{(x)} = \frac{2x+5}{2x+1}$

h) $f_{(x)} = \log(2x - 1)$

i) $f_{(x)} = \log(1 - x^2)$

j) $f_{(x)} = 4^{x+1}$

4. Gráfica de una función

El gráfico de una función real de variable real, queda determinado si se conocen el dominio, rango de la función y a partir de estos conjuntos determinados elaboramos una tabla de valores. Ejemplo:
Graficar la función: **$f_{(x)}$= log (x+2)**

Determinamos el dominio de la función:

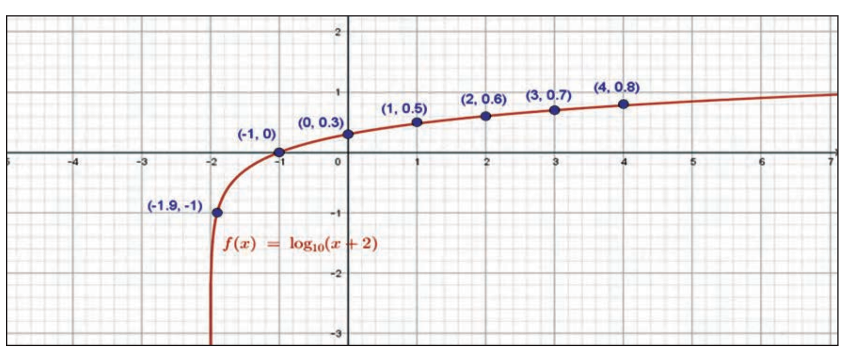
El logaritmo sólo se encuentra si el argumento es positivo, entonces: $x + 2 > 0$ ➔ $x > -2$. ∴ $D_f = (-2, \infty)$.

Determinamos el rango de la función: $y = \log(x + 2)$, por definición de logaritmo: $10^y = x + 2$.

Despejando la variable "x", resulta: $x = 10^y - 2$. Al no existir ninguna restricción en la que interviene la variable "y".

∴ $R_f = \mathbb{R}$. Elaboramos la tabla de valores, asignaremos a partir del número -1.9, simplemente para indicar donde inicia el gráfico de la función:

x	$f(x) = y$	(x, y)
-1.9	-1	(-1.9,-1)
-1	0	(-1,0)
0	0.3	(0,0.3)
1	0.5	(1,0.5)
2	0.6	(2,0.6)
3	0.7	(3,0.7)
4	0.8	(4,0.8)



5. Función inversa

Para establecer la existencia de la función inversa, se requiere verificar que la función dada sea biyectiva, es decir que sea inyectiva y sobreyectiva a la vez. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,y=f_{(x)}$

Escanea el QR

Para aprender a determinar funciones inversas y resolver operaciones con funciones.

Actividad 53.

Determinamos la función inversa de las siguientes funciones, previa comprobación si se trata o no de una función biyectiva:

$f_{(x)}=5x+6$

$f_{(x)}=-x-1$

$f_{(x)}=\dfrac{5x-1}{2}$

$f_{(x)}=\dfrac{2x}{x-4}$

$f_{(x)}=x^3$

$f_{(x)}=\log(3x+1)$

Actividad 54.

1) Determina la función inversa de $f_{(x)}=5x-1$, luego realiza la representación gráfica de la función original, su función inversa y la función identidad.
2) Realizamos la representación gráfica de la función $f_{(x)}=x^3-2$, su función inversa y la función identidad.
3) Establece la función inversa de $f_{(x)}=x^3$, realiza la gráfica mostrando también la función identidad.

Operaciones con funciones

Actividad 55.

1) Determinamos la función suma, diferencia, producto y cociente, dadas las funciones:
   $f_{(x)}=4x-3$ y $g_{(x)}=-6x$
2) Establece la función suma y diferencia, si: $f_{(x)}=4x^2-3x-9$ y $g_{(x)}=8x^2-6x-5$
3) Hallamos la función producto y la función cociente, si: $f_{(x)}=x^2-16$ y $g_{(x)}=2x^2+2x-24$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 56. Reflexionamos en equipos de trabajo para responder las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo se aplican las funciones en la cotidianidad?
2) ¿Cómo se aplican las funciones en el desarrollo de ciencia y la tecnología?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 57. Realicemos las siguientes actividades:

1) Establecemos los valores que debemos promover desde nuestra comunidad, con el compromiso de practicarlos cotidianamente, para evitar toda forma de violencia, no sólo contra la mujer sino con nuestros conciudadanos.
2) Realizamos un informe acerca de los incrementos de casos de violencia contra la mujer los últimos dos años, representándolos en un cuadro y realizando el gráfico correspondiente a través de funciones.

LÍMITE Y CONTINUIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Una institución está organizando una campaña para recaudar recursos económicos. Por experiencia se sabe que los aportes totales están en función al tiempo de la campaña, es decir, mientras más dure más recaudación se obtendrá. En una ciudad se ha determinado esta función que expresa el porcentaje de la población “R” (expresado en fracción decimal) que hará un donativo en función del número de días “t” de la campaña.

La expresión de la misma es: $R=0.7(1-e^{-0.05t})$.

Calcularemos el porcentaje de la población que hará un donativo a los diez días de haberse iniciado la campaña.

Es en este sentido que nos planteamos la idea intuitiva de límite, teniendo en cuenta que podemos acercarnos al número indicado, (en este caso 10) tan cerca como sea posible, sin embargo, no podemos detenernos en él porque la campaña continuará.

Calculamos: $\lim\limits_{x\to 10} 0.7\,(1-e^{-0.05x}) = 0.7(1-e^{-0.05*10}) = 0.7(1-e^{-0.5}) = 0.2754$

Como se requiere el porcentaje, tendremos: 0.2754 *100 = 27.54%

Luego concluimos que el 27,54% de la población realizará su aporte en aproximadamente diez días.

1) ¿Qué porcentaje de la población hará un donativo a los 20 días de haberse iniciado la campaña?

2) Calcule el porcentaje de la población que habrá contribuido con la institución si la campaña publicitaria continúa por tiempo indefinido.

¡Continuemos con la teoría!

Los teoremas sobre límites son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denomina álgebra de los límites. Sean f(x) y g(x) dos funciones definidas en un mismo intervalo, en donde está el valor a del límite y k es una constante, tenemos los siguientes teoremas o propiedades de los límites:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)*g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$$

siempre que g(x) sea diferente de cero.

$$\lim_{x\to a}\big(k*f(x)\big) = k*\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a} k^{f(x)} = k^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

$$\lim_{x\to a}[\log f(x)] = \log[\lim_{x\to a} f(x$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Ejemplos: Resolvemos los siguientes límites, aplicando propiedades:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(7x^2+x) = \lim\limits_{x\to 2}(7x^2) + \lim\limits_{x\to 2} x = 7\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2 + \lim\limits_{x\to 2} x = 7.(2)^2+2 = 7(4)+2 = \mathbf{30}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x-1}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(4x-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+3)} = \frac{4\,.\lim\limits_{x\to -1} x - \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 3} = \frac{4\,.(-1)-1}{-1\,+\,3} = \frac{-4-1}{2} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt[3]{x^2+2} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 5}(x^2+2)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 5}(x^2) + \lim\limits_{x\to 5} 2} = \sqrt[3]{\left(\lim\limits_{x\to 5} x\right)^2 + \lim\limits_{x\to 5} 2} = \sqrt[3]{(5)^2+2} = \sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$

Actividad 58.

Deteminamos los límites aplicando las propiedades dadas:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)$

2) $\lim\limits_{x\to -2}(7x+11)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+4)$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{5\,senx}{x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x-3}{9-x}\right]^{1/2}$

2. Operaciones e indeterminaciones en el infinito

En este tema en algunas ocasiones la variable se aproxima a un valor extremadamente grande, es decir al infinito y en algunas ocasiones surgen operaciones desconocidas llamadas indeterminaciones, en el siguiente cuadro mostramos, las operaciones conocidas con infinito y las siete indeterminaciones:

OPERACIONES DETERMINADAS CON INFINITO		INDETERMINACIONES
$\infty \pm k = \infty$	$(+\infty)+(+\infty) = +\infty$	$\infty - \infty = indeterminado$
$\infty * k = \infty \quad si\ k \neq 0$	$\infty * \infty = \infty$	$0 * \infty = indeterminado$
$\frac{0}{k} = 0$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{0}{0} = indeterminado$
$\frac{k}{0} = \infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{\infty} = indeterminado$
$\frac{\infty}{k} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$0^0 = indeterminado$ $\infty^0 = indeterminado$
$0^k = \begin{cases} 0, si\ k > 0 \\ \infty, si\ k < 0 \end{cases}$	$k^{+\infty} = \begin{cases} \infty, si\ k > 1 \\ 0, si\ 0 < k < 1 \end{cases}$	$1^\infty = indeterminado$
$0^k = 1$	$0^{+\infty} = 0$	
	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	

3. Límites algebraicos

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$. Calculamos el límite, por sustitución directa

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\frac{1}{\infty-1}-\frac{2}{\infty^2-1}=\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}=0-0=0$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}{x-1}\right)$. Calculamos el límite por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}{x-1}\right)=\frac{\frac{3}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}}{\infty-1}=\frac{0-\frac{3}{\infty}}{\infty}=\frac{0-0}{\infty}=\frac{0}{\infty}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^2-7x+6}$. Calculamos el límite por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^2-7x+6}=\frac{6^2-6(6)}{6^2-7(6)+6}=\frac{36-36}{36-42+6}=\frac{0}{0}=???$

Levantamos la indeterminación factorizando: $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^2-7x+6}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{x(x-6)}{(x-6)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{x}{x-1}=\frac{6}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$. Calculamos el límite por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\frac{\sqrt{\infty^2-1}}{\infty-1}=\frac{\sqrt{\infty}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\infty^2}}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{\sqrt{1-0}}{1-0}=1$$

4. Límites especiales

Los límites especiales son aquellos que presentan una gran aplicación tanto para resolución de otros límites como para otras aplicaciones.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}$. Calculamos el límite, por sustitución directa:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}=(1+0)^{\frac{1+0}{0}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^\infty=???$$

Levantamos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+1}=???$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}*\lim_{x\to 0}(1+x)=e*(1+0)=e$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \left(\frac{\infty}{\infty+1}\right)^\infty = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty = ???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}}\right]^x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\right]^x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{8x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{8x} = \left(1-\frac{1}{4*\infty}\right)^{8*\infty} = \left(1-\frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = (1-0)^\infty = 1^\infty = ???$$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{8x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{2*4x} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-4x)}\right]^{(-2)*(-4x)} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{(-4x)}\right]^{(-4x)}\right\}^{-2}$$

$$= \left\{\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-4x)}\right]^{(-4x)}\right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-3^{-x}}{x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-3^{-x}}{x} = \frac{3^0-3^{-0}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = ???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-3^{-x}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{3^x-3^{-x}+1-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{3^x-1-3^{-x}+1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{(3^x-1)-(3^{-x}-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{3^x-1}{x}-\frac{3^{-x}-1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x} - \lim_{x\to0}\frac{(3^{-1})^x-1}{x} = \ln 3 - \ln 3^{-1} = \ln 3 - (-1)\ln 3$$

$$= \ln 3 + \ln 3 = 2\ln 3$$

5. Límites Trigonométricos, exponenciales y logarítmicos

$$\lim_{x\to0}\frac{sen\,x}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,x}{x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,x}{x} = \frac{tg\,0}{0} = \frac{0}{0} = ???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x\to0}\frac{sen\,x}{x\,.\cos x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{sen\,x}{x}*\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right) * \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1*\frac{1}{\cos 0} = 1*\frac{1}{1} = 1$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen\,4x}{2x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen\,4x}{2x} = \frac{sen\,4*0}{2*0} = \frac{sen\,0}{0} = \frac{0}{0} = ???$

Levantamos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen\,4x}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2}*\frac{sen\,4x}{x}\right) = \frac{1}{2}*\lim\limits_{x\to0}\frac{sen\,4x}{x}$

$$= \frac{1}{2}*\lim_{x\to0}\frac{4*sen\,4x}{4*x} = \frac{1}{2}*\ 4\lim_{x\to0}\frac{sen\,4x}{4x} = 2*1 = 2$$

6. Infinitos y al infinito

INDETERMINACIÓN DE LA FORMA: ∞/∞

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2-1} = \dfrac{\infty^4+1}{\infty^2-1} = \dfrac{\infty}{\infty} = ???$

Levantamos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^4+1}{x^4}}{\frac{x^2-1}{x^4}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{1}{x^4}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}$

Realizamos el cálculo del límite por sustitución directa: $= \dfrac{1+\frac{1}{\infty^4}}{\frac{1}{\infty^2}-\frac{1}{\infty^4}} = \dfrac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = \dfrac{1+0}{0-0} = \dfrac{1}{0} = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x-1}$. Calculamos por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{2*\infty+3}{\infty-1} = \dfrac{\infty+3}{\infty} = \dfrac{\infty}{\infty} = ???$

Levantamos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

Realizamos la sustitución directa: $= \dfrac{2+\frac{3}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \dfrac{2+0}{1-0} = \dfrac{2}{1} = 2$

Actividad 59. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{3-\sqrt{x+4}}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{3-\sqrt{x+4}}$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^3-3x^2+4}{4x^3+8}$

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^3-27}{4x^2-9}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{2/x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+6x)^{x}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{6x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2x}$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^3-1}{x-2}$

16) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-8x+3}{4x^2+5x+1}$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 60. En el cuaderno de ejercicios respondemos las siguientes preguntas:

¿Por qué es importante el aprendizaje de los límites?
¿Cómo aplicamos en la vida cotidiana los límites?
¿Consideras que es importante participar en campañas solidarias? ¿Por qué?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 61. Realizamos una campaña solidaria hipotética (una situación supuesta) y consideraremos lo siguiente:

- Calculamos el porcentaje de la población que hará un donativo en un año de haberse iniciado una campaña solidaria, puedes considerar la cantidad necesaria de personas de tu municipio.

- Calculamos el porcentaje de la población que habrá contribuido con la campaña solidaria si esta continuaría por tiempo indefinido.

EL CÁLCULO EMPLEADO EN PROCESOS DE PRODUCCIÓN Y TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Un estudio de productividad en el turno matinal en una cierta fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8.00 a.m. habrá ensamblado: $Q(t)=-t^3+6t^2+15t$, radio transistores en "x" horas después.

¿En qué momento de la mañana está con máxima eficacia?

Cantidad de radios producida por hora: $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$.

Para hallar el momento en el que es más eficiente, calcularemos la hora que el trabajador alcanza su mayor nivel de producción, para ello derivaremos la función de producción e igualaremos la primera derivada a cero:

Realizamos la derivación: $\frac{dQ(t)}{dt} = -3t^{3-1} + 6 * 2t^{2-1} + 15 * 1 \,.\; 3t^2 + 12t + 15 = 0$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, tenemos:

$3t^2 + 12t + 15 = 0 \quad //\div 3$

$t^2 + 4t + 5 = 0$

$(t+1)(t-5) = 0$

Tenemos dos soluciones: $t_1 = -1\,;\; t_2 = 5$

Tenemos dos soluciones: $t_1 = -1\,;\; t_2 = 5$

La solución igual a -1, no se considera, porque el tiempo no puede expresarse en unidades negativas, entonces la respuesta acertada es el momento de máxima eficacia en su trabajo es después de 5 horas.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. La derivada e integrales en procesos productivos

Este tema tiene su importancia puesto que con la derivada de una función podemos determinar un valor instantáneo de la tasa de cambio que puede conducir a establecer una cantidad deseada de un determinado producto.

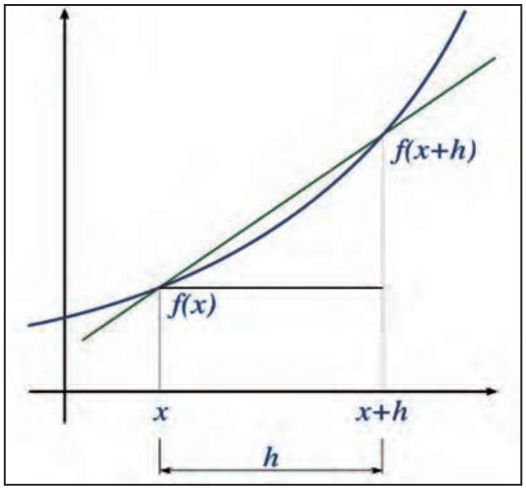
Mientras que la integral de una función puede interpretarse geométricamente como el área bajo la curva de una función real de variable trazada como una función de x. Para los que no son expertos en la materia, ni matemáticos, ni científicos, es probable que las derivadas sean una zona de estudio bastante desconocida.

2. Nociones básicas de la derivada

La derivada de una función en un punto representa el valor de la pendiente de la recta tangente en el mencionado punto y mide el coeficiente en el que varía la función, es decir, nos dará una formulación matemática de la noción del coeficiente de ese cambio. Podemos observar la interpretación gráfica:

La derivada de una función $f(x)$, se denota como: y' ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx}f_{(x)}$; $f'(x)$, se define de la siguiente manera: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Dónde: "h" es el incremento de x.



Ejemplos: Utilicemos la definición para determinar la derivada de las siguientes funciones:

1) $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 5.}$

Calculamos:

1° $f(x+h) = 2(x+h)^2 - 5 = 2(x^2 + 2xh + h^2) - 5 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5$

2° $f(x+h) - f(x) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5 - (2x^2 - 5) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5 - 2x^2 + 5 = 4xh + 2h^2$

3° $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(4x+2h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(4x+2h)$

Evaluamos el límite: $f'(x) = 4x + 2*0 \Rightarrow f'(x) = 4x$

2) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x + 1}$

Calculamos:

1° $f(x+h) = (x+h)^2 - 2(x+h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1$

2° $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1 - (x^2 - 2x + 1)$

$= x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1 - x^2 + 2x - 1 = 2xh + h^2 - 2h$

3° $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2x+h^2-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h^2-2)$

Evaluamos el límite: $f'(x) = 2x + 0^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

Actividad 62. Calculamos por definición la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x^3$
2) $f(x) = 3 - 5x$
3) $f(x) = 4x - 7$
4) $f(x) = 2x^2 - 2x + 6$
5) $f(x) = -5x^2 + 7x - 1$
6) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

3. Derivada en un punto dado

La derivada de una función en un punto dado, se calcula realizando el reemplazo del valor de la variable x, en f' (x).

Ejemplos:

Determinamos la derivada de la función del ejemplo 1 anterior, en el punto de abscisa x= 3. En el ejemplo 1, anterior la función es: $f(x) = 2x^2 - 5$, la derivada que calculamos es: $f'(x) = 4x$.

Determinamos $f'(3) = 4*3 \Rightarrow f'(3) = 12$.

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) $D_x(c) = 0$
2) $D_x(x) = 1$
3) $D_x(c \cdot x) = cv'$
4) $D_x(x^n) = nx^{n-1}$
5) $D_x(v^n) = nv^{n-1}v'$
6) $D_x(u \pm v \pm w) = u' \pm v' \pm w'$
7) $D_x(u \cdot v) = u'v + uv'$
8) $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$
9) $D_x\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{u'}{c}$
10) $D_x\left(\frac{c}{v^n}\right) = \frac{cnv'}{v^{n+1}}, v \neq 0$
11) $D_x(\sqrt{u}) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
12) $D_x(\sqrt[n]{u}) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTALES

1) $D_x(e^v) = v'e^v$
2) $D_x(a^v) = v'a^v\ln(a)$
3) $D_x(\ln v) = \frac{v'}{v}$
4) $D_x(\log_a v) = \frac{v'}{v}\log_a e$
5) $D_x(u^v) = vu^{v-1}u' + \ln(u)u^v v'$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y SUS INVERSAS

1) $D_x(\mathrm{sen}(v)) = \cos(v) \cdot v'$
2) $D_x(\cos(v)) = -\mathrm{sen}(v) \cdot v'$
3) $D_x(\mathrm{tang}(v)) = \sec^2(v) \cdot v'$
4) $D_x(\mathrm{cotg}(v)) = -\csc^2(v) \cdot v'$
5) $D_x(\sec(v)) = \sec(v)\mathrm{tang}(v) \cdot v'$
6) $D_x(\csc(v)) = -\csc(v)\mathrm{cotg}(v) \cdot v'$
7) $D_x(\mathrm{arcosen}(v)) = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$
8) $D_x(\mathrm{arcocos}(v)) = -\frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$
9) $D_x(\mathrm{arcotang}(v)) = \frac{v'}{1+v^2}$
10) $D_x(\mathrm{arcocotg}(v)) = -\frac{v'}{1+v^2}$
11) $D_x(\mathrm{arcosec}(v)) = \frac{v'}{v\sqrt{v^2-1}}$
12) $D_x(\mathrm{arcocsc}(v)) = -\frac{v'}{v\sqrt{v^2-1}}$

4. Regla de la cadena

Sean *f* y *g* dos funciones, para todas las x en el dominio de *g* para las cuales *g* es diferenciable en x y *f* es diferenciable en *g*(*x*), la derivada de la función compuesta: $h(x) = (f \circ g)_{(x)} = f[g_{(x)}]$. Está dada por: $h'(x) = f'[g_{(x)}]g'_{(x)}$

Alternativamente, si *y* es una función de *u*, y a su vez *u* es una función de *x*, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

1) $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{4x^3 - 2})^{\boldsymbol{6}}$. Primero derivamos la potencia y posteriormente se deriva el binomio:

Si $f(x) = (4x^3 - 2)^6 \Rightarrow f'(x) = 6(4x^3 - 2)^5 * (4x^3 - 2)' = 6(4x^3 - 2)^5 * (12x^2 - 0)$

$$f'(x) = 72x^2(4x^3 - 2)^5$$

2) $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{3x^2 - x}}$. Primero derivamos el radical, luego el binomio del radicando:

$$f(x) = (3x^2 - x)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - x)^{\frac{1}{3}-1} * (3x^2 - x)' = \frac{1}{3}(3x^2 - x)^{\frac{1}{3}-1} * (3 * 2x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - x)^{-\frac{2}{3}} * (6x - 1) = \frac{6x-1}{3}(3x^2 - x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{6x-1}{3} * \frac{1}{(3x^2-x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{6x-1}{3\sqrt[3]{(3x^2-x)^2}}$$

3) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2} + \sqrt{\boldsymbol{x}})$

Primero derivamos el logaritmo y luego el binomio

$$f(x) = ln(2 + \sqrt{x}) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}} * (2 + \sqrt{x})' = \frac{1}{2+\sqrt{x}} * \left[2 + (x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2+\sqrt{x}} * \left[0 + \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} * \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2(2 + \sqrt{x})} * \left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2(2 + \sqrt{x}) * x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(4 + 2\sqrt{x}) * \sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} * \sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x} + 2x}$$

Actividad 63 .

Determinemos la derivada de las siguientes funciones en el punto de abscisa dada para cada función:

1) f(x) = 3(x-2); en x=1
2) f(x) = -x+5; en x=-3
3) f(x) = 8x+6; en x=4
4) f(x) =x^2-5x +6; en x=4
5)f(x) =-3x^2+x+4; en x=-3
6) f(x) =-2x^2+7; en x=-2
7) f(x) =$(x-6)^2$; en x=-1

Actividad 64.

Determinemos la derivada de las siguientes funciones:

1) f(x) = x^4
2) f(x) = 4(x-2)
3) f(x) = $(2x-3)^{1/3}$
4) f(x) = $5x^{-2}$-$3x^{-1}$+
5) f(x) = 1/x^2
6) f(x) = x^6/ln x
7) f(x) = $(x^2-9)^{1/5}$
8) f(x) = 3 sen 2x
9) f(x) = sen ^{2} x
10) f(x) = ln$(x^2+4x+3)^{1/2}$

Actividad 65.

Determinemosladerivadadelassiguientesfunciones, aplicando las propiedades correspondientes

1) f(x) = 5x^2
2) f(x) = 7x+1
3) f(x) = 10x + 3
4) f(x) = -x^2 +8x
5) f(x) = -3x^2 +5x -7
6) f(x) = 12x^3-6x^2-2x

Actividad 66.

Calculemos la derivada de cada función, aplicando la regla de la cadena:

1) f(x) = x^3 - 3x^2
2) f(x) = log (6+x^2)
3) f(x) = (x+3)(x-5)
4) f(x) = 7$(4-3x)^2$
5) f(x) = x ln x
6) f(x) = (x+1)/(x-1); x es diferente de 1.

5. Nociones básicas de la integral

Las integrales son básicamente lo contrario a las derivadas, con la ayuda de las integrales podemos encontrar el área bajo una curva definida, existen integrales definidas e indefinidas / simples.

Calcular $\int x^4 dx$.

Por tabla de integrales simples

$$\int \boldsymbol{u^n du} = \frac{\boldsymbol{u^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$$

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c$$

Respuesta:

$$\int x^4 dx = \frac{\boldsymbol{x^5}}{\boldsymbol{5}} + \boldsymbol{c}$$

Calcular $\int (3x - x^2)^2 dx$.

Por tabla de integrales simples: $\int \boldsymbol{u^n du} = \frac{\boldsymbol{u^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$

$$\int [(3x)^2 - 2(3x)(x^2) + (x^2)^2] dx = \int [9x^2 - 6x^3 + x^4] dx$$

$$\int 9x^2 dx - \int 6x^3 dx + \int x^4 dx = 9\int x^2 dx - 6\int x^3 dx + \int x^4 dx$$

$$= 9 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + c \quad \rightarrow \textit{Respuesta:} \int (3x - x^2)^2 dx = \boldsymbol{3x^3} - \frac{\boldsymbol{3x^4}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{x^5}}{\boldsymbol{5}} + \boldsymbol{c}$$

6. Definición de integral definida

La integral definida de *f(x)* en el intervalo [*a*,*b*] es igual al área limitada entre la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas, y las rectas verticales *x = a* y *x = b* (bajo la hipótesis de que la función *f* es positiva). (Figura 1). Esta integral se representa por: $\int_a^b f(x)dx$, donde: *a* es el límite inferior de la integración y *b* es el límite superior de la integración.

Teorema fundamental del cálculo integral

La relación entre derivada e integral definida queda establecida definitivamente por medio del denominado teorema fundamental del cálculo integral, establece que, dada una función *f(x)*, en un intervalo [a, b], denominado regla de Barrow, su función integral asociada *F(x)* cumple necesariamente que: $F'(x) = f(x)$

Se calcula el valor de esta función en los extremos del intervalo: *F(a) y F(b)*.

El valor de la integral definida entre estos dos puntos vendrá entonces dado por: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

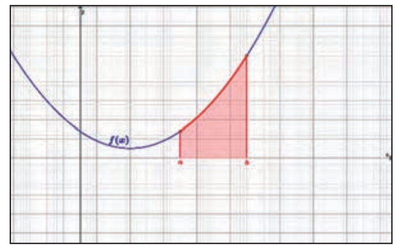


Figura 1: Delimitación de los intervalos de una integral definida

Propiedades de la integral definida

La integral definida cumple las siguientes propiedades:

- Si los límites que integración coinciden, la integral definida vale cero. $\int_a^a f(x)dx = 0$
- El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- Si *c* es un punto interior del intervalo [*a, b*], la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos [*a, c*] y [*c, b*]. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales·

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplos: Determinamos las siguientes integrales definidas:

OLIMPIADA CIENTÍFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Si una máquina produce 150 juguetes en un minuto, ¿cuántos juguetes produce en 10 segundos?

1) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$. Calculamos la integral: $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \sqrt{1} - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1$

2) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx$. Resolvemos aplicando las propiedades:

$\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 3\,dx$

$= \int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 3\,dx = (1)^2 - (2)^2 - 2[1-2] + 3 = 4 - 2[-1] + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$

3) $\int_1^4 (1 - 5x - \sqrt{x})\,dx$. Aplicamos las propiedades:

$$\int_1^4 (1 - 5x - \sqrt{x})\,dx = \int_1^4 1\,dx - \int_1^4 5x\,dx - \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

$= 1 - 5\int_1^4 x\,dx - \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = 1 - 5(1-4) - (\sqrt{1} - \sqrt{4}) = 1 - 5(-3) - (1-2) = 1 + 15 + 1 = 17$

4) $\int_2^{11} \sqrt{x-2}\,dx$. $\int_2^{11} \sqrt{x-2}\,dx = \sqrt{2-2} - \sqrt{11-2} = \sqrt{0} - \sqrt{9} = 0 - 3 = -2$

Actividad 67. Calculemos las siguientes integrales simples.

1) $I = \int \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}\right) dx$

2) $I = \int (\sqrt{mx})\,dx$

3) $I = \int \tan^2 x\,dx$

4) $I = \int \left(\frac{x^3+2}{x}\right) dx$

12) $I = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+a}{\sqrt{x}}\right) dx$

13) $I = \int \left(\frac{\text{sex}+\cos^2+2}{\cos x}\right) dx$

14) $I = \int \left(\frac{e^{2x}+20}{e^x}\right) dx$

5) $I = \int \left(\frac{x^2-9}{x^2-8}\right) dx$

6) $= \int \left(\frac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}\right) dx$

7) $I = \int \left(\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\right) dx$

8) $I = \int \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right) dx$

9) $I = \int (e^{2x} + e^x + 2^x)\, dx$

10) $I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) dx$

11) $I = \int \left(\frac{x^3+x^{50}-1}{x}\right) dx$

15) $I = \int \left[\frac{x^2+(x^2+4)}{x^2(x^2+4)}\right] dx$

16) $I = \int \left(\frac{1}{(x^2-9)}\right) dx$

17) $I = \int (x^4 + x^2)\, dx$

18) $I = \int (x^2 + 3x + 5)\, dx$

19) $I = \int \ln x\, dx$

20) $I = \int (x^3 + 2x + x^{-1})\, dx$

Actividad 68. Determinemos la integral definida de las siguientes funciones de variable real:

1) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

2) $\int_1^2 (x^2-3x+4)\, dx$

3) $\int_1^2 2x\, dx$

4) $\int_4^7 \sqrt{x-3}dx$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

La importancia de las derivadas en la actualidad radica en que no es posible entender el mundo en que vivimos sin la aplicación de las mismas. A lo largo de los siglos, otros matemáticos y científicos han aportado muchísimos estudios para hacer más exactos diversos cálculos. Aunque no es un elemento tangible, su valor radica en que, desde el punto de vista científico, se aplica a numerosas investigaciones importantísimas y de las que sus aplicaciones revierten en la propia sociedad. Así, las derivadas son esenciales para estudios tan importantes como el de la relatividad, la mecánica cuántica, la ingeniería, ecuaciones diferenciales, teoría de las probabilidades, sistemas dinámicos, teoría de las funciones, etc. Actualmente también son necesarios en la computación, etc.

Actividad 69. De manera reflexiba respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la aplicación de las integrales y derivadas?
- ¿Por qué es importante aprender a resolver problemas con derivadas e integrales?

Noticiencia

La derivada nos puede ayudar a calcular el ritmo de cambio del precio de una pizza con respecto a su tamaño

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 70. Realizamos un breve informe acerca de las aplicaciones de la derivada de una función real de variable real, en la economía productiva de nuestra región.

ALGEBRA Y TRIGONOMÉTRIA PREUNIVERSITARIA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Cada año, miles de estudiantes postulan a los exámenes de admisión a universidades públicas, sin embargo, para los bachilleres resulta dificultoso pasar la prueba. Se estima que el 50 por ciento de los postulantes a universidades públicas reprueban los exámenes de ingreso.

Toda prueba de suficiencia presenta un determinado nivel de exigencia y la universidad pública tiene la misión de brindar una formación de calidad, por lo cual el examen de ingreso responde a esas expectativas.

OLIMPIADA CIENTÍFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Si $x^2yz^2 = 5^4$ y $xy^2 = 5^5$.
¿A qué es igual xyz?
A)25 B) 125 C) 5
D) 1 E) Ninguno

- *Si hiciésemos todas las cosas de las que somos capaces, nos asombraríamos* (Thomas Edison)
Realmente, aunque ahora no lo creas, tienes el talento necesario para triunfar con esa materia (y con muchas otras).
- *Tus talentos y habilidades irán mejorando con el tiempo, pero para eso has de empezar* (¿Martin Luther King).
Así que, no pongas más excusas, estudia tus libros.
- *Los campeones siguen jugando hasta que lo hacen bien* (Billie Jean King)
No te rindas ni te desanimes si suspendes un examen o si no consigues obtener los resultados esperados. Todo en esta vida se basa en esfuerzo y sacrificio. Si tienes esos dos ingredientes, el éxito terminará viviendo por sí solo.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Operaciones con números reales

En los números reales existen dos operaciones básicas: la suma y la multiplicación. De ellas se extiende la resta y división como operaciones opuestas de la suma y la multiplicación respectivamente. Marca la respuesta correcta:

Pregunta 1: Simplificar la expresión:

$$\frac{\frac{1+\frac{1}{2}}{3}+\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}{\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}}\cdot\left(23\tfrac{1}{2}\div\frac{47}{12}\right)=$$

Respuestas:
a) 8 b) -8 c) 5 d) 6 e) NA

Pregunta 2: Simplificar la expresión:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{-2}+\frac{\left(\frac{1}{2}-2^{-2}\right)^{-1}}{\left(\frac{8}{\frac{5}{3}}\right)^{-0}+\frac{9^0}{11^{-0}-4^{-1}}}\right]$$

Respuestas:
a) $^{19}/_7$ b) $^{20}/_7$ c) $^{17}/_7$ d) $^{16}/_7$ e) NA

Pregunta 3: Realizando operaciones de: $C = \frac{6^3\cdot16^5\cdot248\cdot3^2}{4^6\cdot9^2\cdot62\cdot48\cdot2^9}$, obtenemos como resultado:

Respuestas:
a) 2 b) $^1/_2$ c) 1 d) 5 e) NA

Pregunta 4: Después de reducir la siguiente expresión se obtiene: $\left(\frac{7\cdot6^x}{36^x+6^{2x+1}}\right)^{-x^{-1}}$

Respuestas:
a) 2 b)4 c) 6 d) 8 e) NA

Actividad 71 . Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Simplifica la expresión: $\frac{8^{-\frac{2}{3}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5^{-0}-16^{-\frac{3}{4}}}$ Respuestas: a) $^{16}/_7$ b) $-^{16}/_7$ c) $^5/_7$ d) $-^5/_7$ e) NA

2) Reducir la siguiente expresión: $\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot3^{-3}}\right]-\left[\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{5}-\frac{17}{125}}\right]^{-2}$ Respuestas: a) 28 b)6 c) 4 d) 2 e) NA

3) Simplificando la expresión $\frac{4\div0.01+3\div0.001+0.1\div0.01}{4\times0.01+3\times0.001+1704.957\times0.001}$, el resultado es: Respuestas: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) NA

4) Reduciendo la expresión: $c=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{0}}{7^{-0}+\frac{5^{-0}}{4^{0}-3^{-1}}}\right]^{-1}$, el resultado es: Respuestas: a) $\frac{20}{37}$ b) $\frac{37}{20}$ c) $-\frac{37}{20}$ d) $-\frac{20}{37}$ e) NA

5) El valor numérico de la expresión: $A=\frac{\sqrt[3]{\frac{16\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{-2-(-4)}}}{\frac{1}{2}-8^{-0}+(-1)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$ Es: Respuestas: a) 2 b) -2 c) 1/2 d) $-1/2$ e) NA

2. Exponentes y radicales

Un radical es equivalente a una potencia de exponente fraccionario en la que el denominador de la fracción es el índice del radical y el numerador de la fracción es el exponente el radicando. Dos o más radicales se dicen equivalentes si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Pregunta 1: Calcular: $A = E^{-E}$ si se tiene E como:

$E=\left(\frac{3^{2-k}+2^{\frac{1}{k}+2}}{4\sqrt{3^{4-2k}}}\right)^{k}$, el resultado es:

Respuestas: a) 1/2 b) 1/5 c) 2/3 d) 1/4 e) NA

Pregunta 2: Hallar el valor de "n" en la siguiente expresión:

$\frac{\left[\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{-3}\left(\sqrt[\frac{1}{4}]{b^3}\right)}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{a^6\left(\sqrt{b^{-3}}\right)}}}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, el resultado es:

Respuestas: a) 4 b) 5 c) 6 d) 1 e) NA

Pregunta 3: Simplificar:

$$J=\left[\left(\sqrt[2a]{\frac{1}{a^2}}\right)^{8a}\cdot\sqrt[8^{-1}]{\left(\sqrt[8b]{a^{2a}}\right)^{\frac{4b}{a}}+\left(\sqrt[8b]{a^{4a}}\right)^{\frac{2b}{a}}}\right]^{2\left(2^{-3^{3}}\right)^{3^{-3}}}$$

Respuestas: a) 256 b) 526 c) 652 d) 565 e) NA

Pregunta 4 : Simplificando la expresión:

$$\left[\sqrt{8}^{\sqrt{8}^{\sqrt{8}}}\right]^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}-6}}$$

, el resultado es:

Respuestas: a) 8 b) 4 c) 2 d) 1 e) NA

Actividad 72. Resolvemos el siguiente ejercicio en el cuaderno de práctica:

Calcular el valor de: $E=\left[\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}\right]\left[\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{a}}}\right]\left[\sqrt{c\sqrt{a\sqrt{b}}}\right]$ Si: $abc=x^8$,

Respuestas: a) x^5 b) x^6 c) x^7 d) x^8 e) NA

3. Operaciones con expresiones algebraicas

La adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de expresiones algebraicas, se conoce con el nombre de operaciones algebraicas. Además, puesto que estas variables, representan números reales, entonces estas operaciones cumplen las propiedades de los números reales.

Pregunta 1: Simplificar la siguiente expresión algébrica:

$$E=\left\{\sqrt{1+\left[\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^2}\right\}^{-6}-\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}$$

Respuestas: a) 1 b)2 c) 3 d) x e) NA

Pregunta 2: Simplificar la siguiente expresión algébrica: $E=\left\{\left[\left(\frac{20^{a^2+1}}{2^{2a^2+4}+2^{2a^2+2}}\right)^{\frac{1}{2a^2}}\right]^2\right\}^{2^0}$

Respuestas: a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) NA

Pregunta 3: Simplificar la siguiente expresión algébrica:

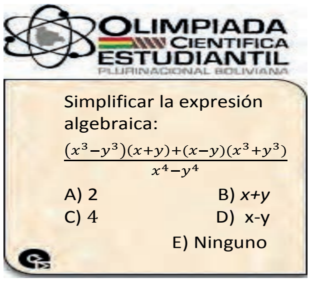
$$\left[\frac{2-a\cdot a^{\frac{1}{2}}+\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2-\left(a-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}\right]^{-3}$$

Respuestas: a) 1/27 b)1/41 c) 1/61 d) 1/81 e) NA

Pregunta 4: Simplificar la siguiente expresión algébrica:

$$E=\left\{\sqrt{1+\left[\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^2}\right\}^{-6}-\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}$$

Respuestas: a) 1 b)2 c) 3 d) x e) NA



Actividad 73. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Sabiendo que: $u=\sqrt[\frac{1+u}{u}]{3}$. Determinar $A=u^{u^{1+u^{-1}}+\frac{3}{u}}$, Respuestas: a) 27 b) 26 c) u d) 1 e) NA

2) Simplificar: $F=\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^3+2x+a}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^3-x-2a}\right]^3+\frac{\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)^{\frac{2}{3}}}}{a}$, Respuestas: a) 2 b)26 c) a d) 1 e) NA

3) Simplificar al máximo la siguiente expresión: $\left[\frac{\frac{1}{a}-a}{\left[\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+1\right]\left[\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-1\right]}+\sqrt[3]{a}\right]^{-3}$ Respuestas: a) 3 b)6 c) a d) 1 e) NA

4. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas en la que deseamos encontrar una solución común. En esta ocasión vamos a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Pregunta 1: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$

Respuestas: a) (3; 7) y (7; 3) b)(3; 3) y (7; 3) c) (3; 7) y (7; 7) d) (3; 7) y (3; 3) e) NA

Pregunta 2: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x+y=4 \end{cases}$

Respuestas: a) $(3;1)$ y $(1;3)$ b)$(-3;1)$ y $(1;3)$ c) $(3;1)$ y $(3;-1)$ d) $(-3;-1)$ y $(1;3)$ e) NA

Pregunta 3: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+ab+b^2=3 \end{cases}$

Respuestas: a) $(2;-1)$ y $(-1;2)$ b)$(-1;2)$ y $(1;2)$ c) $(1;1)$ y $(2;-1)$ d) $(-2;-1)$ y $(1;2)$ e) NA

Pregunta 4: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=4+2xy \\ x+y=8 \end{cases}$

Respuestas: a) $(5;3)$ y $(3;5)$ b)$(3;3)$ y $(5;5)$ c) $(-5;3)$ y $(5;5)$ d) $(3;3)$ y $(5;52)$ e) NA

Actividad 74. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2+3xy=18 \\ x^2-5y^2=4 \end{cases}$ a) $(3;1)$ y $(-3;-1)$ b)$(-3;1)$ y $(1;3)$ e) NA

2) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^3-y^3=-56 \\ x-y=-2 \end{cases}$ a) $(2;4)$ y $(-4;2)$ b)$(4;2)$ y $(2;-4)$ e) NA

5. Desigualdades e inecuaciones

Desigualdades Condicionales o Inecuaciones: son aquellas que se verifican sólo para determinados valores o sistema de valores atribuido a sus incógnitas y para los cuales están definidos sus miembros.

Pregunta 1: Si $x \in \left(\frac{2}{5};6\right)$. Hallar la suma del máximo y mínimo valor que puede tomar la expresión: P= $\frac{6+x}{x}$

Respuestas: a) 18 b) 2 c)16 d) 17 e) NA

Pregunta 2: Hallar la suma de los valores enteros de x que satisfacen la inecuación: $(x-1)^2+|x-1|<12$

Respuestas: a) 5 b) 2 c)6 d) 7 e) NA

Actividad 75. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Si $x \in [2;4]$ y $\left(\frac{x+3}{x+2}\right) \in [a;b]$. Determinar el valor $a+b$.

Respuestas: a) $\frac{29}{12}$ b) $\frac{12}{29}$ c) $\frac{-29}{12}$ d) $\frac{29}{-12}$ e) NA

2) ¿Cuántos valores enteros de X verifican la inecuación? Resolver: $x^2-3|x|-10<0$

Respuestas: a) 9 b)11 c) 10 d) 1 e) NA

6. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Un sistema de ecuaciones exponenciales es aquel sistema en los que las incógnitas aparecen en los exponentes. Igualamos exponentes y resolvemos el sistema. En primer lugar, aplicamos las propiedades de las potencias del producto o el cociente, para quitar las sumas o restas de los exponentes.

Pregunta 1: Hallar el valor numérico de:

$$E=\sqrt{3^{2+\frac{1}{2}\log_3 16}\cdot 9^{4\log_{81} 2}}$$

Respuestas: a) 24 b)22 c)26 d) 27 e) NA

Pregunta 2: Hallar la solución de la ecuación:

$$\log_{\sqrt{5}}\{5\log_3[1+\log_4(x+3)]\}=2$$

Respuestas: a) 13 b)12 c)16 d) 17 e) NA

Pregunta 3: Resolver la siguiente ecuación.

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} = 248$$

Respuestas: a) 3 b)2 c)6 d) 7 e) NA

Pregunta 4: Resolver el siguiente sistema de ecuación logarítmica y exponencial.

$$\begin{cases} 4^x = 16y & ① \\ 4y = 2^{x+1} & ② \end{cases}$$

Respuestas: a) $(3;4)$ b)$(-3;1)$ e) NA

Actividad 76. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Hallar el valor numérico de: $\boldsymbol{E = \frac{1}{2}\log_3\left[\left(\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 6\log_2\sqrt{2} + \log_2 32 + \log_4 8\right]}$,

Respuestas: a) 1 b)2 c) NA

2) Hallar la solución de la ecuación: $\log(1 + x^2 + 2x) - \log(x^2 - 3) = 2\log(x + 1)$,

Respuestas: a) 2 b)1 c) NA

3) Resolver la siguiente ecuación: $x^{x^{x^2-1}} = x^{x^5}$, Respuestas: a) 25 b)22 c)26 d) 27 e) NA

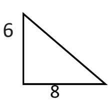
4) Resolver el siguiente sistema de ecuación logarítmica y exponencial: $\begin{cases} 25^{x^2} = (\sqrt{5})^{y^2} & ① \\ \ln x = 2\ln y & ② \end{cases}$

Respuestas: a) $(1/4; 1/2)$ b)$(-1/4; 1/2)$ e) NA

7. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos

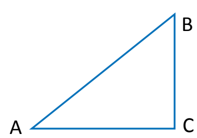
Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo de 90° y 2 de sus lados reciben el nombre de catetos y el lado más grande de hipotenusa. Triángulo Oblicuángulo es el que no tiene ningún ángulo de 90° y se dividen en Acutángulo y Obtusángulo.

Pregunta 1: Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8:



Respuestas: a) 10 b)12 c)16 d) 17 e) NA

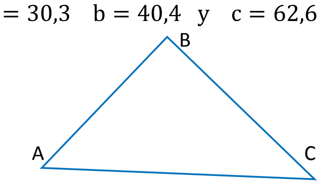
Pregunta 2: Resolver el triángulo rectángulo en el cual: $\hat{A} = 35^\circ 10'$ y $c = 72{,}5$:



Respuestas: $\hat{B} = 54^\circ 50'$; $a = 41{,}7$; $b = 59{,}3$ F o V

Pregunta 3: Resolver el triángulo oblicuángulo ABC, dados:

$a = 30{,}3$ $b = 40{,}4$ y $c = 62{,}6$:



Respuestas: $\hat{A} = 23^\circ$ $\hat{B} = 32^\circ$ y $\hat{C} = 124^\circ$ F o V

Actividad 77. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Resolver el triángulo rectángulo en el cual: $\hat{A} = 58^\circ 53'$ y $a = 24{,}36$
2. Resolver el triángulo rectángulo en el cual: $a = 43{,}9$ y $b = 24{,}3$
3. Resolver el triángulo oblicuángulo ABC, dados: $b = 321$; $\hat{A} = 75^\circ 20'$; $\hat{C} = 38^\circ 30'$
4. Resolver el triángulo oblicuángulo ABC, dados: $b = 215$; $c = 150$; $\hat{B} = 42^\circ 40'$

8. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Las identidades trigonométricas son ecuaciones que involucran las funciones trigonométricas que son verdaderas para cada valor de las variables involucradas. Puede usar las identidades trigonométricas junto con los métodos algebraicos para resolver las ecuaciones trigonométricas.

Pregunta 1: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{(\sin\theta - \cos\theta)^2 - 1}$$

Respuestas: a) -1 b)1 c)0 d) -2 e) NA

Pregunta 2: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \frac{Cot^2\beta + 1}{tan^2\beta + 1}$$

Respuestas: a) $Cot^2\beta$ b) $Cot^3\beta$ c) $Cot^1\beta$ e) NA

Pregunta 3: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$$

Respuestas: a) $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$ c) $\tan\alpha$ d) e) NA

Pregunta 4: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \frac{(\cos\omega + \tan\omega \cdot \sin\omega)^2 - 1}{sin^2\omega}$$

Respuestas: a) $sec^2\omega$ b) $Cot^3\beta$ c) $Cot^1\beta$ e) NA

Actividad 78. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Simplificar la siguiente expresión: $x = \frac{csc^2\theta \cdot \cot\theta - cot^3\theta + \sec\theta - \cot\theta}{\csc\theta}$ Respuesta: $\tan\theta$ F o V

2) Simplificar la siguiente expresión: $x = (\sin\beta + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \cos\beta)^2$ Respuesta: 2 F o V

9. Progresiones y análisis combinatorio

- Una progresión aritmética es toda sucesión en el cada término después del primero se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada razón.

- Una progresión geométrica es una sucesión de números, en la que cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada razón.

Ejemplo: Un padre de familia desea tener un capital para costear los estudios universitarios de su hijo y empieza a ahorrar a la par que su hijo comienza el primer curso de secundaria. Si el primer ahorro es de Bs. 25 y cada mes posterior ahorra Bs 5 más, calcula el monto del depósito del último mes y a cuánto asciende lo ahorrado cuando su hijo sale bachiller (anualmente el padre de familia deposita 12 cuotas).

Datos

$U_1 = 25$

$U_2 = 30$

$r = 5$

$U_{72} = 380$

$U_n = U_1 + (n-1)r$

$U_{72} = 25 + (72-1)5$

$U_{72} = 380$

$S_n = \frac{(U_1+U_n)n}{2}$

$S_{72} = \frac{(25+380)72}{2}$

$S_{10} =$ 14580 Bs Respuesta

Actividad 79. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

Progresiones aritméticas

1) El 32^0 término de una progresión aritmética es – 18 y la razón 3. Hallar el 1$^{er.}$ término.

2) El 92^0 término de una progresión aritmética es 1050 y el 1$^{er.}$ término – 42. Hallar la razón.

3) ¿Cuántos términos tiene la progresión $\div\, 5; \frac{16}{3}; \ldots\ldots 18$?

4) El cuarto término de una progresión aritmética es 10, y el sexto es 16. Escribir la progresión.

5) Hallar la suma de los quince primeros números acabados en 5.

Progresiones geométricas

1) En una progresión geométrica. Hallar el 6^0 término de $:: 1; \frac{2}{5}; \frac{4}{25}; \ldots\ldots$

2) El 5^0 término de una progresión geométrica es $\frac{16}{125}$ y el 6^0 término $\frac{32}{625}$. Hallar el primer término.

3) Hallar la razón de $:: -5; \ldots\ldots .640$ de 8 términos.

4) Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de razón positiva en la que:

$U_2 = 10$ y $U_4 = 250$

5) El tercer término de una progresión geométrica vale 80, y la razón es 4. Calcula la suma de los cinco primeros términos.

- La combinatoria o análisis combinatorio es la parte de las matemáticas que estudia las ordenaciones y agrupaciones de los elementos. Sus aplicaciones son enormes, sobre todo en la informática, la estadística y el cálculo de probabilidades. En la vida cotidiana tenemos numerosos ejemplos de aplicación.

Sea n y k números enteros positivos tales que $k \leq n$. Se denomina ***numero combinatorio o coeficiente binomial*** de "n $sobre$ k", al símbolo $\binom{n}{k}$ definido por: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Los elementos de un número combinatorio se llaman numerador y denominador, también se conoce con el nombre de índice superior (n), e índice inferior (k).

Ejemplo: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot(4)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{7\cdot5}{1} = 35$

Ejemplo: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot(2)!} = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = \frac{2\cdot3}{1} = 6$

- El factorial de un número entero positivo n, denotado por n!, es el producto de todos los números naturales, anteriores o iguales a él es decir: n!=1·2·3·4·5·6·…·n si: n>1

Ejemplo: Calculamos el valor de "n" , si: $\frac{(n+3)!(n+5)!}{(n+3)!+(n+4)!} = 120$

$$\frac{(n+3)!(n+5)(n+4)!}{(n+3)!+(n+4)(n+3)!} = 120$$

$$\frac{(n+3)!(n+5)(n+4)!}{(n+3)[1+(n+4)]!} = 120$$

$$\frac{(n+3)!(n+5)(n+4)!}{(n+3)[n+5]!} = 120$$

$$(n+4)! = 5!$$
$$n+4 = 5$$
$$n = 5-4$$
$$n = 1$$

El valor que satisface la ecuación es 1

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Simplificar: $A + \frac{\frac{A}{B}+1}{\frac{A}{B}-1}$;

sabiendo que A=1/2; B=1/3

4 B) 1/2 C) 7/8

D) 1/7 E) 11/2

- Las permutaciones, es variar la disposición u ordenar dos o más elementos. Es necesario precisar si estas cosas son o no indistinguibles, para asegurar que la nueva configuración sea diferente al original

Ejemplo: De cuántas maneras se puede distribuir 5 monedas de 5 bolivianos y 7 monedas de 2 bolivianos, entre 12 estudiantes de primaria de forma que a cada uno de ellos le corresponda una sola moneda.

M_1=5 bolivianos
M_2=7 bolivianos
M_3=12 estudiantes de primaria

$$P\binom{5;7}{12} = \frac{12!}{5!\cdot7!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{12\cdot11\cdot2\cdot3}{1} = 792$$

- Existen 792 maneras de que los 12 estudiantes de primaria tengan a la mano una moneda de 5 bolivianos.
- Existen 792 maneras de que los 12 estudiantes de primaria tengan a la mano una moneda de 2 bolivianos.

10. Cálculo del término n-simo aplicando el Binomio de Newton

Binomio de Newton

Se denomina binomio de Newton a la potencia de un binomio cualquiera de la forma:

$(a+b)^n$ (Todos los signos son positivos) y $(a-b)^n$ (se intercalan los signos)

Descomponer: en general se presenta de esta manera el binomio de Newton

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Término general de un binomio: $(a+b)^n$

$$t_r = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\ldots\ldots\cdot(r-1)factores}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\ldots\ldots\cdot(r-1)}\cdot a^{n-(r-1)}\cdot b^{(r-1)}$$

Actividad 80. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

Pregunta 1: Encontrar el 5to. Término del desarrollo de: $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3\right)^9$

Respuestas: a) $\frac{7}{144}x^{10}y^{12}$ b) $\frac{7}{144}x^{10}y^{11}$ c) $\frac{7}{144}x^{11}y^{12}$ d) $\frac{7}{144}x^{10}y^{10}$ e) NA

Pregunta 2: Encontrar el 4to. Término del desarrollo de: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{z}\right)^{11}$

Respuestas: a) $-55x^4z$ b) $55x^4z$ c) $-55x^4$ d) $-55z$ e) NA

Pregunta 3: Encontrar el término medio del desarrollo de: $\left(\frac{2}{9}\cdot\sqrt{x} - \frac{3}{4}\sqrt{y}\right)^8$

Respuestas: a) $\frac{1120}{81}x^2y^2$ b) $-\frac{1120}{81}x^2y^2$ c) $-\frac{1120}{81}x^2$ d) $\frac{1120}{81}y^2$ e) NA

Pregunta 4: Encontrar el término central del binomio de: $\left(\frac{3}{4}m^5 - \frac{4}{3}n^6\right)^{10}$

Respuestas: a) $-252m^{25}n^{30}$ b) $252m^{25}n^{30}$ c) $-252m^{25}n^{25}$ d) $252m^{30}n^{25}$ e) NA

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Simplificar:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$

D) 4 E) 8

11. Resolución de exámenes para diferentes instituciones superiores

Simplificamos: $M=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

$$M=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(-1)(a-b)}+\frac{c^3}{(-1)(a-c)(-1)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^3}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^3(b-c)-ab^3+b^3c+ac^3-bc^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3(b-c)-ab^3+ac^3+b^3c-bc^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{(b-c)[a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)}{(a-b)(a-c)}$$

$$M=\frac{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^3-ab^2-abc+b^2c-ac^2+bc^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$M=\frac{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{a(a+b)(a-b)-bc(a-b)-c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)}$$

$$M=\frac{(a-b)[a(a+b)-bc-c^2]}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^2+ab-bc-c^2}{(a-c)}=\frac{a^2-c^2+ab-bc}{(a-c)}$$

$$M=\frac{(a+c)(a-c)+b(a-c)}{(a-c)}=\frac{(a-c)[(a+c)+b]}{(a-c)}=(a+c)+b=a+b+c$$

Simplificamos la siguiente expresión:

$$E=\frac{\left(b+\frac{1}{a}\right)^x\left(a-\frac{1}{b}\right)^z}{\left(a+\frac{1}{b}\right)^x\left(b-\frac{1}{a}\right)^z},\quad E=\frac{\left(\frac{ab+1}{a}\right)^x\left(\frac{ab-1}{b}\right)^z}{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^x\left(\frac{ab-1}{a}\right)^z}=\frac{\left(\frac{ab+1}{a}\right)^x}{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^x}\cdot\frac{\left(\frac{ab-1}{b}\right)^z}{\left(\frac{ab-1}{a}\right)^z}=\left(\frac{\frac{ab+1}{a}}{\frac{ab+1}{b}}\right)^x\cdot\left(\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right)^z$$

$$E=\left[\frac{b(ab+1)}{a(ab+1)}\right]^x\cdot\left[\frac{a(ab-1)}{b(ab-1)}\right]^z=\left(\frac{b}{a}\right)^x\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^z=\left(\frac{b}{a}\right)^x\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{-z}=\left(\frac{b}{a}\right)^{x-z}$$

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Martha Sofía tiene 32 años. En 10 años la edad de Martha Sofía será igual a la suma de las edades de sus tres hijos tendrán entonces. En el presente, ¿cuánto suman las edades de los tres hijos de Martha Sofía?

Actividad 81. Resolvemos el siguiente examén de ingreso a una universidad.

Carreras: economía, contaduría pública, administración de empresas
Area: matematica
Tiempo límite: 70 minutos **Numero de preguntas:** 10
Marque su respuesta en el inciso, seleccionando en la hoja de respuesta: solo debe elegir una sola opción.

1.- Un funcionario de la universidad gana Bs 200 diarios y gasta Bs 500 semanales, cuantos días tendrá que trabajar para comprar con sus ahorros un auto que cueste Bs 27.000

a) 210	b) 205	c) 200	d) 215	e) Ninguno

2.- El rango de la función: $y = 8 - x^2$

a) $[0,8]$	b) $[8,+\infty[$	c) $]-\infty,8]$	d) $[-8,5]$	e) Ninguno

3.- Juan tiene Bs 120 y gasta consecutivamente: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ de lo que iba quedando. Determina "a" cantidades que le queda.

a) 20	b) 40	c) 30	d) 35	e) Ninguno

4.- Determine el valor de: $\left[a^{-\frac{3}{2}}b\cdot(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$

a) 1	b) -1	c) 2	d) -2	e) Ninguno

5.- Una persona hace un trabajo en 3 días y otra persona B puede hacer el mismo trabajo en 5 días. Determine el tiempo que tardarían A y B conjuntamente haciendo el mismo trabajo.

a) $\frac{14}{5}$	b) $\frac{13}{8}$	c) $\frac{15}{12}$	d) $\frac{15}{8}$	e) Ninguno

6.- La suma de las soluciones del sistema: $\begin{cases} pq+6p-370=0 \\ p-0.2q-3.8=0 \end{cases}$

a) 31	b) 51	c) 21	d) 41	e) Ninguno

7.- Dos fruticultores llevan al mercado 100 sandias, una de ellas tenía mayor número de sandias que el otro, no obstante, ambos obtuvieron igual suma de dinero, uno de ellos dice al otro: Si yo hubiera tenido la cantidad de sandias que tuviste y tú la cantidad que yo tuve, hubiésemos recibido Bs 15 y Bs $\frac{20}{3}$ ¿Cuántas Sandias tenía cada uno?

a) 30 y 70	b) 45 y 95	c) 20 y 80	d) 40 y 60	e) Ninguno

8.- La suma de los primeros 5 términos de la progresión: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$ es:

a) $\frac{162}{121}$	b) $\frac{122}{153}$	c) $\frac{162}{121}$	d) $\frac{121}{160}$	e) Ninguno

9.- Los ahorros en 3 años de una persona están en progresión aritmética. Si en los 3 años ha ahorrado 2.400 Sus, y el primer año ahorro la mitad de lo que ahorro el 2do año. Determina cuanto ahorro cada año.

a) 300,600,1500	b) 400,800,1200	c) 500,1000,900	d) 450,900,1050	e) Ninguno

10.- La suma de la solución de: 1 + 2log(x) = log (x + 2) mas $\frac{13}{2}$ *es* 7 . Calcular el valor de x:

a) $\frac{1}{3}$	b) $\frac{2}{3}$	c) $\frac{3}{2}$	d) 2	e) Ninguno

Nota. Comprueba las respuestas si son correctas.

Desafío

Juegan blancas y dan jaque mate en dos jugadas.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 82. Reflexionemos respecto a la importancia de estudiar con responsabilidad y respondemos las siguientes preguntas:
1) ¿Como realizamos nuestras prácticas?
2) ¿Resolvemos los ejercicios de manera autónoma o esperamos que termine nuestro compañero para copiar?
3) ¿Será que nuestros esfuerzo para estudiar es muy limitado?
4) ¿En qué áreas o situaciones, estudias a conciencia para fortalecer la formación integral?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

En el Sistema Educativo Plurinacional de Bolivia los estudiantes bachilleres se preparan para dar el examen de ingreso a las universidades e institutos.

Actividad 83. Realizamos una estrategia de estudio para rendir el examen de ingreso, puedes guiarte en las siguientes preguntas:
1) ¿Por dónde debo empezar?
2) ¿Qué material de apoyo utilizar?
3) ¿Cuándo debo empezar a prepararme?

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 84. En los años de escolaridad hemos tenido la oportunidad de visitar e ingresar a un campo deportivo similar al de la fotografía, en el cual, desde el punto de vista de lugares geométricos y secciones cónicas, se pueden distinguir:

circunferencias, parábolas y rectas, es en este sentido que podemos denotar como origen de coordenadas el lugar donde se realiza el "tiro de esquina", cada un metro puede ser nuestra medición tanto horizontal como vertical y así tenemos nuestra cancha polifuncional plasmada en coordenadas. Posteriormente utilizando cintas métricas adecuadas, cuadernos de apunte y trabajando en equipos calculemos:

1) La intersección de la circunferencia en la parte central del campo deportivo y la recta trazada en el centro de la misma, recuerda anotar las coordenadas de intersección.

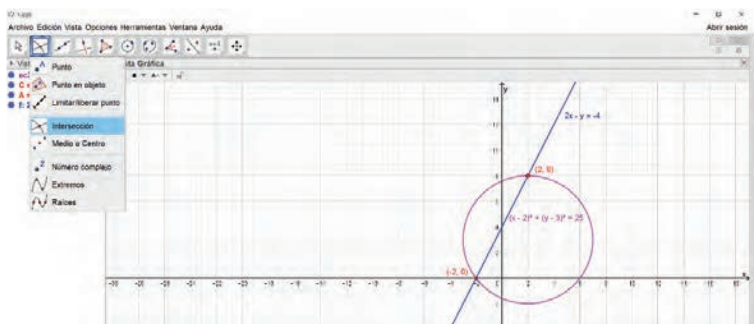
2) La intersección de la parábola (del campo específico para lanzamiento válido por tres puntos en básquetbol) y la recta que delimita la cancha de voleibol, observarás en la fotografía anterior que tendríamos dos puntos de intersección.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1) GeoGebra

Como aprendimos en la anterior gestión a utilizar Geogebra en el área de matemática, en este contenido analizaremos los siguientes problemas con lugares geométricos.

1) Determinamos gráficamente la posición relativa de una recta y una circunferencia, si la recta tiene por ecuación $x - 2y + 1 = 0$ y la circunferencia tiene ecuación es $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$.



Realizamos la resolución gráfica utilizando Geogebra:

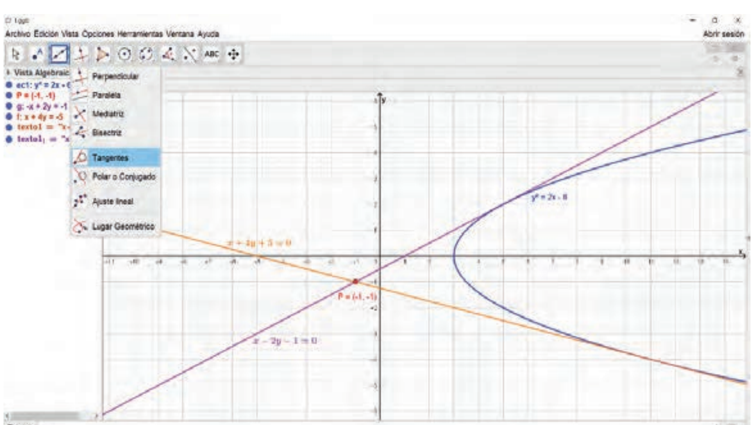
Analíticamente para determinar los puntos de intersección, debemos resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los lugares geométricos:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \end{cases}$$

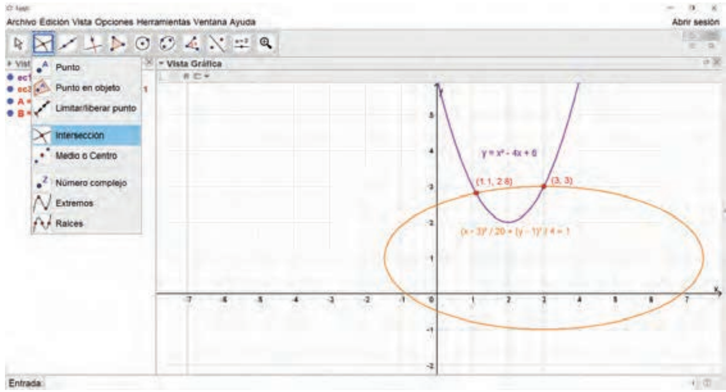
que dará como resultado las coordenadas de los puntos de intersección, de tal manera que nuestra gráfica mostrará estos resultados con antelación. Gráficamente también podemos determinar la ecuación de la recta tangente a una parábola, a partir de un punto dado, utilizando GeoGebra.

2) Establecer las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 = 2x - 6$, trazadas desde el punto P(-1,-1).

Para determinar las ecuaciones de forma analítica, utilizamos el procedimiento aprendido en el primer trimestre.



3) Determinamos los puntos de intersección de la parábola y la elipse. Graficamos cada lugar geométrico y encontramos los puntos de intersección.



2. Taller de pensamiento lógico

2.1. Ajedrez VI

Hay que aclarar que, estas reglas básicas del ajedrez, no abarcan todas las situaciones posibles que pueden presentarse durante una partida (de ahí la importancia del arbitraje), pero son suficientes para establecer la secuencia básica del juego.

El jugador con las piezas blancas mueve primero

Decidir si jugarás con las piezas negras o blancas del ajedrez, no es una cuestión de gusto, sino que hay un componente estratégico en cada decisión. En primer lugar, deberás tener en cuenta que el jugar con las piezas blancas siempre mueve primero.

Tu primer movimiento es crucial y, como consejo, debe responder a una estrategia; para ello, debes conocer muchas aperturas modernas del ajedrez, las cuales te permitirán sacar la delantera.

Cada jugador mueve 1 de sus piezas en su turno

En este aspecto, las reglas de ajedrez son claras, no puedes mover más de una pieza en tu turno.

Gana el jugador que logre hacer Jaque Mate al oponente

El objetivo del juego es muy sencillo: capturar al rey enemigo y lograr un jaque mate. Durante la partida, verás varias situaciones en las que el rey estará amenazado, sin embargo, puede librarse de la captura; a eso se le llama jaque. Sobre esta situación, hay 2 puntos que aclarar:

Ningún jugador puede exponer a su propio rey a un jaque mate

Ningún jugador puede mover una pieza que ponga a su propio rey en jaque mate. Si detectas que tu contrincante deja expuesto a su rey a un jaque mate, en tu siguiente turno debes prevenirlo. No importa que esta situación te beneficie (pues prácticamente ganarías llegado tu turno), puesto que las reglas del ajedrez son claras y, esa acción (exponer tu propio rey), es un movimiento prohibido.

Sin embargo, si quieres jugar ajedrez online, no tienes que preocuparte por esto, puesto que el juego no te permitirá mover la pieza que quieres. Esto se debe a que, como es un movimiento prohibido y la plataforma online tiene las reglas del ajedrez, bloquea el movimiento automáticamente. ¿Te imaginas un modelo de juego que permita tener una pieza traidora que ignore esta regla?

El jugador que declara jaque mate debe explicar la situación

Al anunciar jaque mate, además de permitir que tu oponente evalúe la situación, debes explicar por qué es un jaque mate (sobre todo si eres principiante o juegas contra un novato), para garantizar que tu oponente no puede realizar ninguna acción que salve al rey según las reglas del ajedrez.

Recuerda que, al hacer jaque mate, no estás capturando al rey enemigo (no mueves ninguna de tus piezas al espacio del rey oponente), sino que bloqueas el movimiento del rey contrario; es decir, lo arrinconas, por lo que es el jugador oponente quien debe rendir al rey (acostando la pieza).

Por ello, en cuanto declares jaque mate, si tu oponente no se ha percatado de esta situación, lo más probable es que quiera entender los motivos de tu jaque mate. Además, esto te servirá para demostrar que conoces las reglas básicas del ajedrez. Con esto, ya tenemos cubierto lo que serían las reglas del ajedrez para principiantes, vamos a lo que sigue.

Reglas avanzadas del ajedrez

Con lo anterior, ya tienes lo suficiente para jugar tus partidas con amigos y familiares; sin embargo, si quiere competir, el formato competitivo incluye varias reglas del ajedrez que abarcan diferentes situaciones.

El uso del reloj

¿Has visto todas esas películas en que juegan ajedrez y golpean un reloj? En algunos formatos, este sirve para medir el tiempo de cada jugador, es decir, cuánto tarda en realizar un movimiento.

Al ser un juego estratégico, muchos jugadores se toman su tiempo para pensar, analizar la estrategia del oponente y considerar diferentes opciones de movimiento según las reglas del ajedrez. Por ello, el reloj se torna indispensable en el caso de las competencias. ¿Te imaginas esperar 30 minutos para que el oponente tome una decisión?

Entonces, la cuestión es que el reloj no solo está ahí para admirar a los grandes campeones de ajedrez, que parece que juegan tenis con las piezas, pues responden casi al instante cada acción del oponente. El reloj existe porque, en algunos torneos, las reglas del ajedrez establecen que cada jugador dispone de 2 minutos para realizar su movimiento.

En competencia, las reglas del ajedrez dictan que el reloj es el inicio del tiempo de comparecencia, que debe ser cero. Además, el reloj marca la caída de bandera; es decir, el final de un turno. No puedes realizar ningún movimiento fuera de tu tiempo y si es necesaria una reubicación de piezas, se hace en el tiempo del jugador.

Irregularidades

Juraría que escuché que pensaste: ¿reubicación de piezas? Sí, en efecto, las reglas del ajedrez consideran esta posibilidad. Pero ojo, no es cuando te arrepentiste de tu movimiento después de hacerlo, porque una “ficha tocada, es una ficha jugada”. Las reglas del ajedrez permiten una reubicación de piezas cuando se detecta y establece una irregularidad.
Por ejemplo: imagina que tu oponente mueve una pieza y al hacerlo deja a su rey regalado para un jaque mate, pero ¡tú no te das cuenta! Y realizas otra acción en tu turno. Luego, tu oponente analiza las piezas de ajedrez en el tablero y nota que realizó un movimiento prohibido.

Quizá tu oponente prefiera quedarse callado, pensando que te habría regalado la victoria, pero no, las reglas del ajedrez no funcionan así. En ese caso, quien haya detectado la situación, debe informarla. Recuerda que exponer a tu propio rey es un movimiento prohibido, por lo que, en primer lugar, nunca debió pasar.

En este caso, las piezas se deben reubicar a su posición inicial, antes de que ocurra el movimiento prohibido. Como esta situación, las reglas del ajedrez consideran dos situaciones como irregularidades comunes que ameritan reubicación:

Jugar con piezas equivocadas antes de realizar 10 movimientos. Por ejemplo, esto sucede si en el torneo te tocaban las piezas negras, pero te sentaste a jugar con las piezas blancas.

Si algunas piezas han sido desplazadas (por accidente) de sus respectivas casillas al realizar otros movimientos.
Para cualquier otra situación, las reglas del ajedrez establecen que debe intervenir el arbitraje. Para ello, estas situaciones requieren que seas capaz de entender problemas complejos para solucionarlo. En ese sentido, si requieres de esas habilidades, te recomendamos nuestro curso resolución de problemas complejos.

Anotación de los movimientos

Debo tener algo en el oído porque juraría que te escuché preguntar: ¿y cómo harán para recordar cómo estaban las piezas y reubicarlas? En competitivo, las reglas de ajedrez incluyen un seguimiento llamado “anotación de los movimientos”, que debe mantener cada jugador.

Quizá, si juegas con amigos en tu casa, consideres innecesario contar con una libreta o formato para que cada jugador haga sus anotaciones, pero en competencias es muy importante y es la principal herramienta para hacer una aclaración, denunciar un movimiento prohibido o pedir partida tablas.

Las reglas del ajedrez establecen que cada jugador debe contar con 30 segundos extra en su límite de tiempo para realizar sus anotaciones o, por el contrario, asignar a otras personas para que hagan estas anotaciones de sus movimientos.

Complejo, ¿verdad? Pues bien, confieso que nunca me he visto en la necesidad de hacer este seguimiento, por un lado, porque jugando en línea la misma plataforma hace las anotaciones y, por otro, porque cuando juego con amigos solemos hacer un juego rápido. Sin embargo, es importante que tengas en cuenta esto para progresar y competir. Las anotaciones de movimiento se hacen en notación algebraica como explicaremos a continuación:

Notación algebraica

Para que esta regla del ajedrez avanzado quede clara, debes saber qué es la notación algebraica, puesto que es el único formato que reconoce la FIDE. Esta notación tiene sus propias especificaciones dentro de las reglas del ajedrez, pero daré un pequeño resumen:

- Cada pieza se indica con su abreviatura y en mayúscula. Ejemplo: caballo = C; torre = T; dama = D.
- Los peones no se indican con la primera letra, solo por anotación. Ejemplo: g4 se entiende como peón a espacio g4.
- La posición se establece en el cruce de la fila y columna que ocupe la pieza. Las columnas se indican con letra una letra en minúscula (de la a hasta la h), y las filas con un número (del 1 al 8).
- El movimiento se anota colocando la inicial de la pieza (menos el peón) en mayúscula junto con la posición final. Por ejemplo: Ae5 (Alfil a casilla e5); no es necesario anotar la posición de origen.

Partida tablas

Esto es muy importante: nadie gana en partida tablas. Las reglas del ajedrez establecen que, una partida tablas, es una derrota mutua y ambos jugadores deben estar de acuerdo para declarar tablas.

Lo aclaro porque de niño viví varias situaciones de acorralamiento con mi oponente buscando “ganar” por tablas, pues perseguía a mi rey con el mismo movimiento y ponía la excusa de que mi rey no tenía escapatoria.
Las reglas del ajedrez definen que la partida es tablas cuando la pieza de un jugador ocupa la misma posición por tercera vez (no necesariamente por repetición de movimientos).

A ningún jugador le conviene buscar tablas. Si acorralas al rey, bloqueando las opciones de movimiento de tu oponente, pero tú sí cuentas con varias opciones de movimiento, cambia tu estrategia y no busques tablas.
De hecho, hay torneos donde se establece en las reglas de ajedrez que las tablas están prohibidas, si se presenta la situación, se considera como irregularidad.

Puntuación

En un torneo multitudinario, es importante llevar un registro de tus puntos. Estos se establecen de la siguiente forma:

- El jugador que gana su partida, recibe 1 punto.
- El jugador que pierde su partida, recibe 0 puntos.
- El jugador que entabla su partida, recibe medio punto (0.5).

Curiosamente, las reglas del ajedrez establecen que no se pueden dar otras fracciones de punto, como 3/4 o 1/4.

Conducta

El primer aspecto que consideran las reglas del ajedrez sobre la conducta es el siguiente: “Los jugadores no actuarán de forma que deshonren el juego de ajedrez”. Entre otras cosas, dentro de las reglas del ajedrez que refieren a la conducta de los participantes, se establece que está prohibido distraer o molestar a tu contrincante, lo cual incluye que imposibilidad de hacer reclamos, ofertas de tablas que no proceden o fuertes ruidos en la zona de juego. Así que, si tu estrategia no funciona, bajo ningún motivo vayas a voltear la mesa.

Arbitraje

En la competencia, las reglas del ajedrez otorgan al árbitro muchas facultades y responsabilidades, la primera de ellas es que debe velar por que se cumplan las reglas del ajedrez. Por ello, un árbitro, debe ser alguien comprometido con el cumplimiento de reglas, que sepa identificar irregularidades al momento. Hay mucho que estudiar para ser un buen árbitro, como ser disciplinado y dormir bien para no perderse ningún movimiento rápido.

Reglas del ajedrez rápido y ajedrez relámpago

Ya conoces las reglas básicas del ajedrez y has dado un vistazo a las reglas avanzadas, con eso es más que suficiente para empezar tus partidas. Sin embargo, hay formatos especiales de juego, para cuando dispones de poco tiempo o te gusta vivir al extremo.

Ajedrez rápido

El ajedrez rápido hace pocas variaciones en cuanto a las reglas del ajedrez en general. Principalmente, limita el tiempo de juego, de forma que el total de movimientos no debe superar un tiempo fijo de menos de 10 minutos, pero no más de 60 minutos (para cada jugador).

Ajedrez relámpago

Al igual que el anterior, el ajedrez relámpago no modifica las reglas del ajedrez, solo limita el tiempo, ya que el total de movimientos de cada jugador debe realizarse en menos de 10 minutos. Extremo, ¿verdad?

Reglas especiales del ajedrez que mejorarán tus jugadas

¡Qué bien! Has logrado llegar a esta sección complementaria a las reglas del ajedrez básicas que ya hemos visto. Eres consciente de que aprender más movimientos y reglas especiales en el ajedrez te ayudarán a mejorar tus estrategias en este juego de mesa tan apasionante.

Así que comencemos de inmediato esta lección, donde podrás poner en práctica las jugadas especiales y algunas reglas del ajedrez que no son tan conocidas, ya que ahora lo que necesitas es ganar confianza y dominar las reglas propias del juego. ¡Seguimos!

Promoción de peón o coronación

La primera de las reglas especiales del ajedrez es la coronación o promoción de peón. ¿De qué se trata esta regla? Muy fácil. Si un peón llega al borde opuesto del tablero del jugador, es promovido como otra pieza del tablero, ya sea torre, caballo, alfil o reina.

La nueva pieza sustituye al peón en su casilla actual y sigue las reglas de movimiento de la pieza correspondiente. Así que, según las reglas especiales del ajedrez, puedes escoger convertirte en cualquier pieza del tablero excepto un rey.

Así mismo, debes tener en cuenta que conocer las reglas del ajedrez te da la oportunidad de tener a más de 1 reina. ¡Así es! Las reglas del ajedrez dicen en cuanto a la promoción que cada vez que un peón llega al otro lado del tablero puede también convertirse en reina, incluso si la otra reina que ya habías conseguido siguiera en el juego.

Esto quiere decir que un jugador puede tener varias reinas como resultado de la promoción de sus peones, o varios alfiles capaces de moverse a lo largo de las diagonales del mismo color dependiendo de la casilla a la que el peón ha sido promovido.

Enroque de las piezas

Antes de comenzar con esta regla especial de ajedrez, veamos que dice la RAE acerca de la definición de “Enroque”. En el juego del ajedrez, movimiento defensivo en que el rey y la torre del mismo bando cambian simultáneamente su posición. Entonces, ¿en qué consiste el enroque? Esta es una regla especial del ajedrez que te permite hacer 2 jugadas simultáneamente. Es posible hacer un enroque con cualquiera de las dos torres siempre y cuando no se hayan movido de su esquina inicial.

Las reglas especiales del ajedrez manifiestan que puedes mover el rey hacia la torre en dos casillas en vez de una, y luego colocar la torre de tu oponente en la casilla al lado del rey. Para hacer este movimiento, ten en cuenta lo siguiente:

- Debe ser el primer movimiento del rey.
- Debe ser el primer movimiento de la torre.
- El rey debe estar fuera de jaque.
- No puedes enrocar al rey por una casilla que se vea amenazada por una pieza de tu oponente.
- La torre puede saltar por encima de otra pieza.
- No debe haber ninguna otra ficha de ajedrez entre ellos antes de hacer el enroque.
- El rey y la torre deben estar en la misma fila.

Como ya conoces las reglas básicas del ajedrez, tal vez te estés preguntando: ¿cuántos tipos de enroque hay? Hay dos tipos de enroque en el ajedrez, uno que puede hacerse al lado del rey, que recibe el nombre de enroque corto) o también puedes hacer un enroque al lado de la reina, el cual se le conoce como enroque largo.

Pro tip: Recuerda que no puedes utilizar al rey en un movimiento de enroque si está en jaque. En cambio, puedes mover una torre para hacer un enroque incluso si es amenazada por una pieza del oponente. En otras palabras, puede ser capturada en el siguiente turno del oponente, o en cualquiera de las casillas que atraviesa durante la ejecución de la jugada.

Captura al paso o “comer al paso”

Como te has dado cuenta, el ajedrez es principalmente un juego de estrategia. Y aunque puede parecer que alguien resulte ganador por la forma en que usa las reglas del ajedrez a su favor, son los esfuerzos de planificación a largo plazo los que te pueden dar más oportunidades de éxito.

Así que ahora vamos a explicarte qué es “comer al paso” o captura al paso en el ajedrez, una de las reglas especiales más populares entre ajedrecistas expertos o principiantes de todo el mundo. Si uno de los peones de tu oponente avanza dos casillas, tu adversario puede declarar “comer al paso” en el siguiente turno y mover su peón en diagonal a la casilla que el peón cruzó, capturando el peón como si hubiera movido solo una casilla. Claro que, para que sea una jugada legal, debes declarar el cruce y llevarlo a cabo en el siguiente turno del oponente, de lo contrario, el jugador que tiene la oportunidad de capturar el peón pierde esa oportunidad. Pero no querrás desaprovecharlo, así que más vale que mantengas presente esta importante regla del ajedrez. ¿Está claro?

Por ejemplo, digamos que mueves un peón desde la segunda fila hasta la cuarta y el peón de tu adversario está en la cuarta fila. El peón oponente puede capturar el tuyo con un movimiento diagonal a la casilla que estaba protegiendo. Esta regla del ajedrez suele definir muchísimos partidos en el tenso final de una partida. Por eso, es clave que no te quedes solamente con las reglas básicas del ajedrez.

Por ejemplo, digamos que mueves un peón desde la segunda fila hasta la cuarta y el peón de tu adversario está en la cuarta fila. El peón oponente puede capturar el tuyo con un movimiento diagonal a la casilla que estaba protegiendo. Esta regla del ajedrez suele definir muchísimos partidos en el tenso final de una partida. Por eso, es clave que no te quedes solamente con las reglas básicas del ajedrez.

A pesar de conocer las reglas del ajedrez, ten en cuenta que el ajedrez es un juego de pensar mucho y no está hecho para todos. Hay que practicar mucho, como también observar a alguien jugarlo. Lo bueno es que siempre puedes practicar las reglas del ajedrez en la comodidad de tu smartphone, una tablet o en una computadora.

Regla de los 50 movimientos

Esta es una de las más avanzadas de las reglas del ajedrez, pues rara vez entra en vigor en el tablero. Sin embargo, es posible que te topes con esta jugada viendo un partido de algún súper maestro. Recordemos la gran contienda de 1997 entre el ruso “Garry Kasparov vs. Deep Blue”, en la que una computadora desarrollada por científicos de IBM hizo renunciar al ruso después de 19 movimientos.

Pues bien, ¿de qué se trata la regla de los 50 movimientos?
La regla del ajedrez establece que es posible reclamar un empate si no ha habido una captura y si no se ha movido ningún peón en los 50 movimientos anteriores. Y si decíamos que esta regla del ajedrez escasamente entra en un juego es porque más bien sirve para evitar que se extienda para siempre, o sea, cuando uno o ninguno de los jugadores saben cómo terminar el juego.

Ejercicios de razonamiento

El Ajedrez es sin duda el deporte ciencia que puede practicarse desde cualquier edad, con las experiencias cotidianas que suceden, a veces es necesario realizar un análisis de cada situación para tomar las mejores decisiones, seguramente encontraras un sin fin de opciones para practicar este deporte, te presentamos una página (que podras ingresar a través de los códigos QR) en la que podrás encontrar todos los detalles para que seas un ajedrecista destacado.

En ajedrez es importante la resolución de ejercicios y problemas de razonamiento , empezaremos resolviendo los siguientes mates:

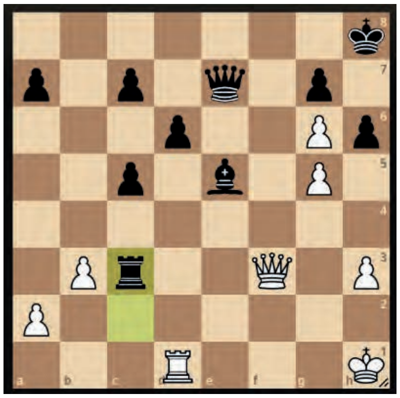
Actividad 81. Analiza las siguientes posiciones para encontrar en jaque mate en un movimientos:

Juegan Blancas

Juegan Negras

Juegan Negras

Actividad 85. Analiza las siguientes posiciones para encontrar en jaque mate en dos movimientos:



Juegan Blancas

Juegan Negras

Juegan Negras

Escanea el QR

Ingresa al código QR para aprender las nociones básicas del ajedrez.

Escanea el QR

Ingresa al código QR para resolver problemas de razonamiento (combinaciones y mates) a través de la plataforma Lichess.

Escanea el QR

Ingresa al código QR para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 86. Reflexionamos acerca de la importancia del desarrollo del pensamiento lógico a través de la practica del ajedrez y respondemos las siguientes preguntas:

1) ¿ Para qué nos sirve aprender a jugar ajedrez?
2) ¿ Porqué es importante el desarrollo del pensamiento lógico matemático?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 87. Con materiales del contexto construimos un tablero de ajedrez y sus piezas para organizar con los compañeros de curso y la ayuda del profesor una torneo de ajedrez.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

www.minedu.gob.bo
@minedubol
@minedubol
@minedu_bol
Ministerio de Educación - Oficial
MinEduBol
informacion@minedu.gob.bo
(591) 71550970 - 71530671
@minedu_bolivia

Av. Arce No. 2147 • Teléfonos: (591-2) 2442144 - 2442074 • Casilla de Correo: 3116
La Paz - Bolivia