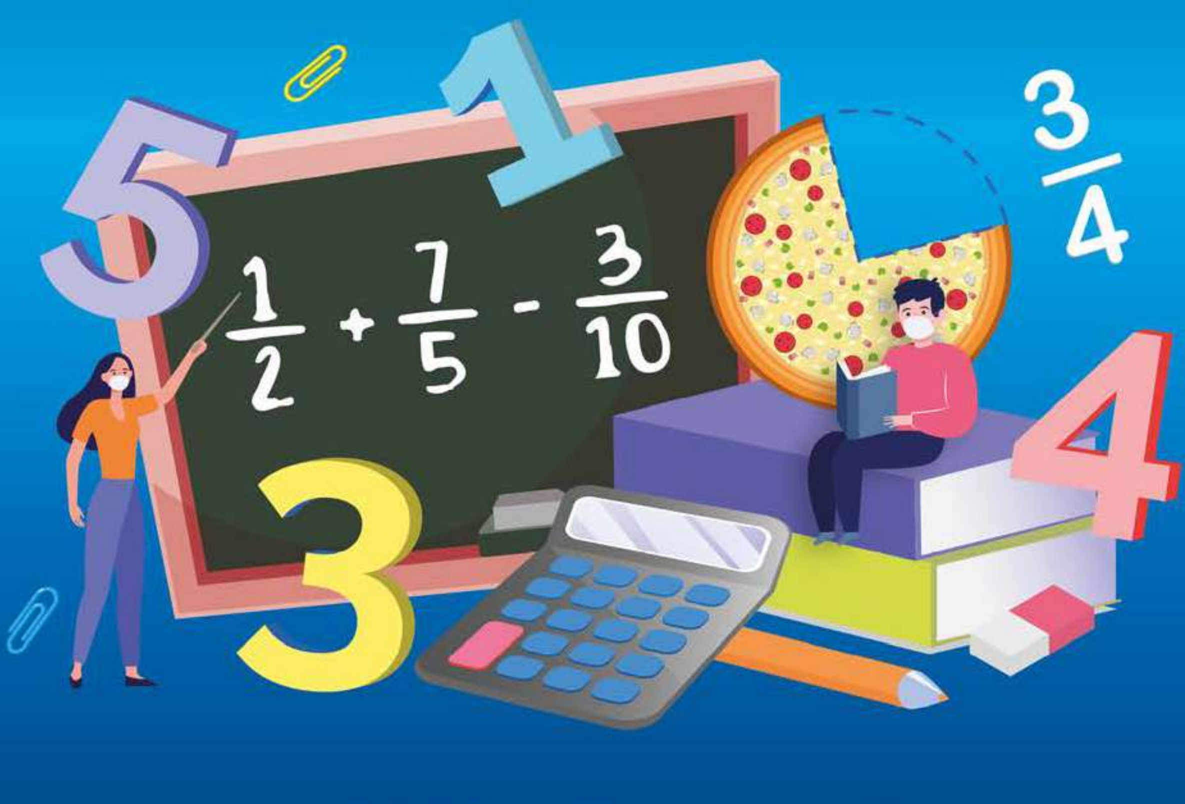
ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

MATEMÁTICA
APRENDIZAJES APLICADOS

EDUCACIÓN SECUNDARIA DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

DOCUMENTO DE TRABAJO



DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN DE ADULTOS

"2022 AÑO DE LA REVOLUCIÓN CULTURAL PARA LA DESPATRIARCALIZACIÓN:
POR UNA VIDA LIBRE DE VIOLENCIA CONTRA LAS MUJERES"

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA
MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO NIVEL APRENDIZAJES APLICADOS
MATEMÁTICA (1RO Y 2DO SEC.)
EDUCACIÓN DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Sandra Cristina Cruz Nina
VICEMINISTRA DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Fernando Reynaldo Yujra Quispe
DIRECTOR GENERAL DE EDUCACIÓN DE ADULTOS

EDICIÓN
Viceministerio de Educación Alternativa y Especial
Dirección General de Educación de Adultos

Depósito Legal:
4-1-7-2022 P.O.

Impresión:
EDITORIAL DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Av. Arce, Nro. 2147
www.minedu.gob.bo

La Paz - Bolivia
2022

PRESENTACIÓN

Con el propósito de consolidar el derecho a la educación con calidad en los aprendizajes, el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, a través del Viceministerio de Educación Alternativa y Especial y la Dirección General de Educación de Adultos, inicia ésta segunda fase proporcionando recursos educativos para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas para la presente gestión.

Es importante considerar que las Personas Jóvenes y Adultas participan activamente de los cambios en la sociedad y para ello, la Educación Alternativa les brinda oportunidades de formación y capacitación que les permita tener mejores posibilidades de acceso al conocimiento en diversos campos de saberes, una formación permanente, continua y desarrollo igualitario, participativo e incluyente en el marco filosófico del Vivir Bien.

Los materiales educativos que se ponen a consideración, tienen un enfoque inclusivo, buscan responder a la diversidad de características de las y los estudiantes/participantes; se encuentran elaborados según las orientaciones del currículo, es decir, la formación integral de acuerdo a las dimensiones del ser, saber, hacer y decidir, los objetivos holísticos, los momentos metodológicos y la evaluación; además, toma en cuenta los diferentes contextos y modalidades de atención del Sistema Educativo Plurinacional, enmarcados en el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo constituido en la Ley de la Educación N° 070 "Avelino Siñani – Elizardo Pérez".

Estimados estudiantes/participantes, comunidad en general, les invitamos a ser parte de la Educación Alternativa y a continuar con su formación personal y comunitaria que nos permitirá avanzar juntos en el "2022 año de la revolución cultural para la despatriarcalización: por una vida libre de violencia contra las mujeres".

Edgar Pary Chambi

Ministro de Educación

ÍNDICE

El presente, constituye un material educativo que coadyuvará en los procesos educativos de estudiantes/participantes del ámbito de la Educación Alternativa, orientados hacia el desarrollo de las potencialidades de la comunidad, a partir de las experiencias, recuperando los saberes y conocimientos de nuestro contexto.

Ofrece una serie de contenidos que han sido seleccionados para despertar el gusto por el aprendizaje y la participación, tomando en cuenta las orientaciones metodológicas que nos guiarán en el proceso.

MÓDULO I
NÚMEROS RACIONALES

OBJETIVO HOLÍSTICO

Desarrollamos la práctica de principios y valores en las actividades cotidianas, reconociendo los números enteros y racionales, aplicados en procesos productivos a través de la resolución de problemas, para transformar nuestra práctica educativa.

UNIDAD 1

NÚMEROS RACIONALES EN LA VIDA FAMILIAR Y COMUNITARIA

1. PRÁCTICA

Números racionales en la vida familiar y comunitaria

En temporada de la cuarentena muchas de las familias tuvieron que racionar su alimento. La familia de Edwin Mamani Mayta, su esposa, hija e hijo vieron que los mercados y ferias estaban desabastecidos, con poca afluencia de comerciantes, sin embargo lograron adquirir 1 kilogramo de carne, 1 kilogramo queso, $1\frac{1}{2}$ libra de tomate, $\frac{3}{2}$ kilogramos de papa y 10 unidades de panes.

A partir de nuestra experiencia y considerando la lectura, respondamos las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo realiza Edwin la distribución de los alimentos, considerando la cantidad de integrantes que tiene su familia?
2. ¿Cómo afecta a la familia no saber racionalizar los alimentos para obtener una mejor distribución en situación de desabastecimiento?

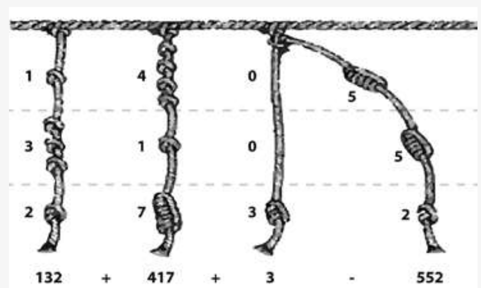
2. TEORÍA

Números racionales

Los números racionales son aquellos que se pueden expresar en forma de cociente de dos números enteros, se denomina "racional" porque representa una parte de un todo (la unidad). Al conjunto de los números racionales lo designamos con el símbolo "Q".

- NÚMEROS RACIONALES
  - NÚMEROS ENTEROS
    - NÚMEROS NEGATIVOS
    - PUNTO DE REFERENCIA "0"
    - NÚMEROS POSITIVOS
  - NÚMEROS FRACCIONARIOS
    - DECIMALES EXACTOS
    - DECIMALES PERIÓDICOS MIXTOS
    - DECIMALES PERIÓDICOS PUROS

Sabías que...



Los QUIPUS (se pronuncian kipus), eran un sistema de registro de información numérico creado por los Incas, antiguos pobladores de América del Sur (Perú, Ecuador, Bolivia, parte de Colombia, Chile y Argentina). Consta de un cordel horizontal del cual pendían varias cuerdas delgadas trenzadas. Estas eran de diferentes tamaños y colores, en ellas se almacenaban información contable, entre otros datos.

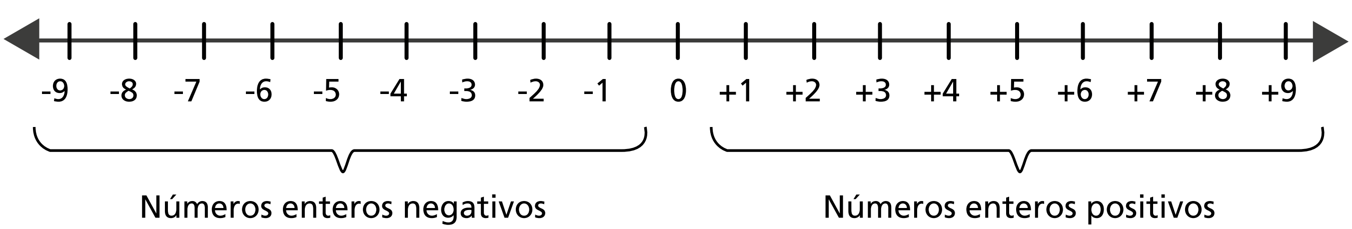
Cada cuerda vertical estaba dividida en zonas y de acuerdo a la altura en la cuerda, la zona representaba unidades, decenas, centenas, etc.

Números enteros

La recta numérica

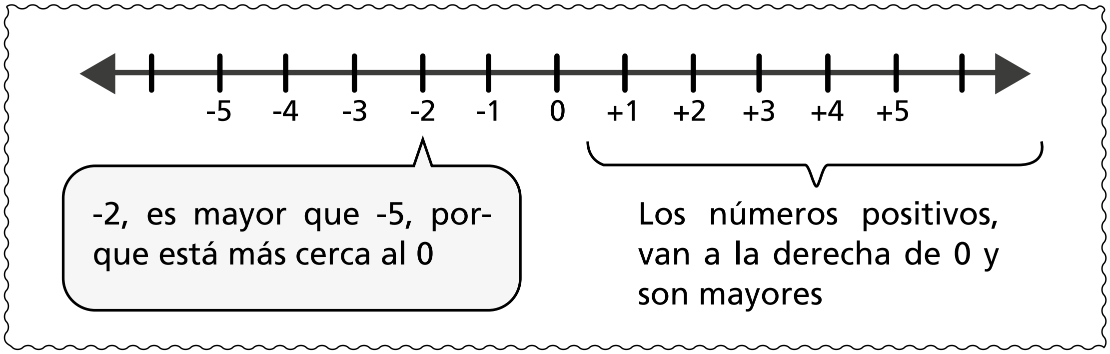
Los números negativos **(-)** son menores que todos los números positivos **(+)** y que el cero **(0)**. Para entender cómo están ordenados los números enteros, utilizaremos la recta numérica:

Recta Numérica



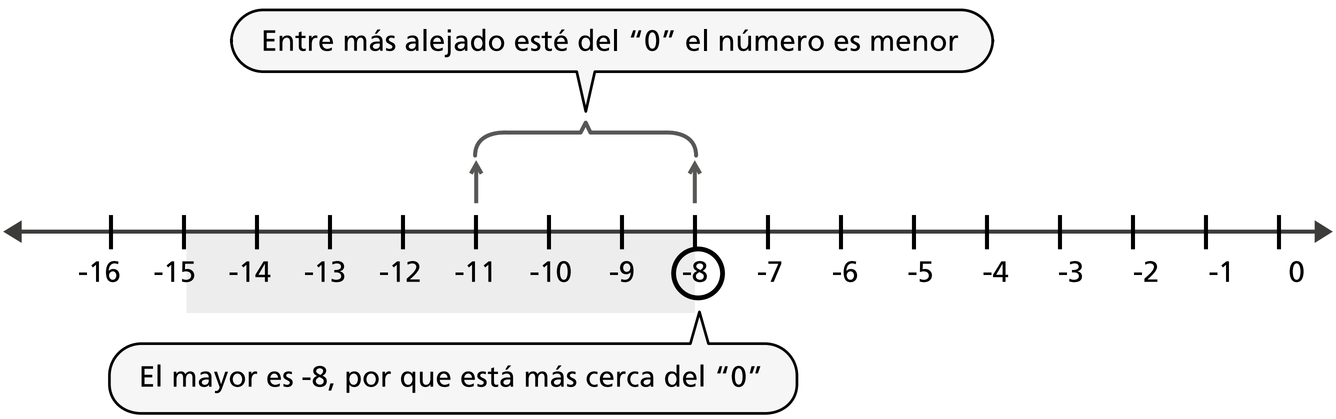
Ejemplo 1

Si tengo dos números, el -2 y el -5, ¿Cuál será mayor?



Ejemplo 2

Si tengo dos números, el -15 y el -8, ¿Cuál será mayor?



Los números enteros los aplicamos en:

Compra y venta de productos:

- Cuando compramos es un gasto y eso se lo puede interpretar como negativo.

Prestar y deber dinero:

- Cuando prestas dinero a otra persona entonces se interpreta como positivo.
- Cuando debemos dinero a alguien o al banco entonces es negativo.

Aplicando la recta numérica, encerramos en un círculo el mayor de cada par de números:

-10	-7	+2	-22	0	-100	+26	+78
+8	+42	+455	+454	-30	-55	+2	-2
0	-800	-500	+500	-78	+3	+355	-488

Relacionar con una línea el enunciado con el número que corresponde

Tengo una deuda de Bs. 200	**+ 400**
Obtuve una ganancia de Bs. 200	**-200**
El pez nada a 12 metros debajo del nivel del mar.	**+2.000**
Vendiendo un quintal de maíz obtuve una ganancia de Bs. 400	**+200**
Un avión vuela aproximadamente a 2.000 msnm.	**-12**

Ahora vamos a ordenar los números:

a) **-5, +5, 0, -9, -18, +19, +25, +3, -2, +2** de menor a mayor:

-18				**0**					

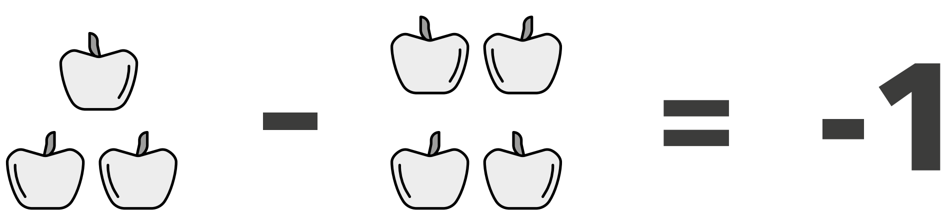
b) **-1, +4, 0, -12, -20, +19, +14, +6, -8, +8** de menor a mayor:

-20				**0**					

Operaciones con los números enteros

Relacionar. Las operaciones que podemos realizar con los números enteros son : la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Suma y resta de los números enteros



Para sumar o restar números enteros primero debemos tomar en cuenta las siguientes reglas:

Si dos números tienen signos iguales, los números se suman y al resultado se le antepone el signo común.

+8 +9 = +17
-8 -9 = -17

Si dos números tienen signos diferentes, los números se restan (el mayor menos el menor) y al resultado se le antepone el signo del número mayor.

-20 +10 = -10
+15 -10 = +5

Ejemplos:

a) 8 + 32

Un número sin signo se sobre entiende que es positivo (+).

8 + 32 = 40

b)

-22 -15

-22 -15 = -37

Signos iguales se suman y se mantiene el signo.

c)

+18 -8

18 -8 = 10

Signos diferentes se restan y se mantiene el signo del mayor.

d)

-6 -3 -6 -1

-6 -3 -6 -1 = -16

e)

8 -5 +4

8 -5 +4 = 7

f)

10 -4 +5 -1 +3 -6 +7

= 10 +5 +3 +7 -4 -1 -6

Agrupamos los números positivos y sumamos.

Agrupamos los números negativos y sumamos.

= 25 -11

Realizamos la operación correspondiente.

= 14

Regla para resolver operaciones con paréntesis:

a) 7 – (-3)

Eliminando paréntesis

=7 + 3

Cambia de signo

= 10

TOMAR NOTA

Si delante de un paréntesis existe un signo positivo (+) se eliminan los paréntesis sin cambiar de signo.

Si delante de un paréntesis hay un signo negativo (-) se eliminan los paréntesis y se cambian TODOS los signos de los términos que estaban en su interior.

b)

$-3 - (+6)$

$= -3 - 6$

$= -9$

c)

$(-12) - (+7) - (-5) + (+2) - (-10) + (+8)$

$= -12 - 7 + 5 + 2 + 10 + 8$

$= -19 + 25$

$= +6$

d)

$-15 - (-10) + (+5) + (+7) + (+5) + (-8) - (-6)$

$= -15 + 10 + 5 + 7 + 5 - 8 + 6$

$= + 10 + 5 + 7 + 5 + 6 - 15 - 8$

Agrupamos números positivos, números negativos y sumamos.

$= + 33 - 23$

$= 10$

e)

$-10 + [-5 + (+7 - 3)] + 15$

Eliminamos paréntesis

$= -10 + [-5 + 4] + 15$

Eliminamos corchetes.

$= -10 - 1 + 15$

$= -11 + 15$

$= 4$

En nuestro cuaderno, desarrollamos los siguientes ejercicios:

a) - 5 + 20 = 15	**h) 12 - 25 =**
b) 23 + 6 =	**i) - 32 + 27 =**
c) - 45 - 56 =	**j) - 8 + 62 =**
d) - 54 + 31 =	**k) 91 - 90 =**
e) - 154 - 674 =	**l) 785 - 425 =**
f) 420 - 473 =	**m) - 672 + 345 =**
g) 902 + 655 =	**n) - 106 - 631 =**

Problemas de aplicación de sumas y restas

Ahora realicemos unos cuantos problemas con sumas y restas:

Situación problémica 1

Juan fue a cosechar uva durante dos meses a Tarija, le pagaron Bs. 2.880, para volver a Cochabamba hizo los siguientes gastos:

- Compró alimentos como: Arroz, aceite, fideo y otros con Bs. 500
- Pagó por los pasajes un total de Bs. 250
- Compró ropa para sus hijos con Bs. 350
- Le debía dinero Julio y le pagó Bs. 800

¿Cuánto de dinero le sobró a Juan?

Juan ganó Bs.2.880	**+2.880**
Compro alimentos con Bs. 500	**-500**
Pago pasajes Bs. 250	**-250**
Compró ropa con Bs. 350	**-350**
Debía dinero Bs. 800	**-800**

Tenemos la siguiente operación: + 2.880 – 500 – 250 – 350 – 800

Entonces tendremos:	**2.880 - 500 - 250 - 350 - 800**
Separamos positivos (+) y negativos (-)	**2.880 - 500 - 250 - 350 - 800**
Sumamos	**2.880 - 1.900**
Restamos	**= 980**

Solución: A Juan le sobró Bs. 980.

Situación problémica 2

Ana tenía un cerdo y lo vendió a Bs.650, llegó el día domingo y salió a la feria de Sucre.

- Compró frutas y verduras con Bs. 32
- Compró útiles escolares para sus hijos con Bs. 25
- Almorzó con su esposo en la pensión y pagó Bs. 24
- Pagó una deuda a Adela de Bs. 150
- Vendió 2 arrobas de maíz a Bs. 70

¿Cuánto dinero tiene Ana después de ir a la feria?

Venta del chancho Bs. 650	**+650**
Compra de fruta y verduras Bs.32	**-32**
Compra de útiles escolares Bs. 25	
Almuerzo Bs. 24	
Pago de deuda Bs. 150	
Venta de maíz Bs. 70	
Entonces tendremos	
Separamos positivos (+) y negativos (-)	
Sumamos	
Restamos	

Solución: ....

Resolvamos en nuestros cuadernos

Luciano toca en una banda, fue a trabajar a la fiesta de la Virgen de Cotoca y le pagaron 380 bolivianos, realizó muchos gastos:

- Compró comida y gastó Bs. 60
- Compró una camisa con Bs. 65
- Regaló dinero a su amiga Bs. 150
- Perdió dinero en la calle Bs. 85

De retorno a casa recibió el pago de una deuda de Bs. 20. ¿Cuánto dinero tiene después de ir a trabajar?

Solución: ....

Situación problémica 3

En el departamento del Beni, Daniel y Julia se casan, en su fiesta reciben un regalo de Bs. 3600, considerando que la pareja tenía un ahorro de Bs. 1500, realizan las siguientes compras:

- Dos terneras pequeñas con Bs.3000
- Cuatro cerdos pequeños con Bs.800
- 6 pavos con Bs.300
- Daniel trabaja de albañil y gana en el día Bs.110
- Compran dos quintales de semilla de maíz con Bs.280

- Julia vende tres patos a Bs.350

¿Cuánto dinero tienen ahora los recién casados Daniel y Julia?

Solución: ....

Multiplicación y división de números enteros

Multiplicación de números enteros

Para multiplicar dos o más números enteros, primero multiplicamos los signos, luego sus valores numéricos.

Valor numérico es el valor absoluto, sin tomar en cuenta el signo.

Ley de signos

(+) · (+) = (+)
(+) · (-) = (-)
(-) · (+) = (-)
(-) · (-) = (+)

Multiplicamos los siguientes números enteros:

a) $(+3) \cdot (-4) = -12$

Multiplicamos los valores numéricos.

Aplicamos la ley de signos.

b) $4 \cdot (-12) = -48$

Multiplicamos los números.

Aplicamos la ley de signos.

c) $4 \cdot (-5) = -20$

Multiplicamos los números.

Aplicamos la ley de signos.

d) $(-8) \cdot (-2) = +16$

Multiplicamos los valores numéricos.

Aplicamos la ley de signos.

e) $(-3) \cdot (-21) = +63$

Multiplicamos los valores numéricos.

Aplicamos la ley de signos.

f) $(-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = 81$

Multiplicamos los valores numéricos.

Aplicamos la ley de signos.

g) $5 \cdot (-5) \cdot 5 \cdot (-5) = 625$

Multiplicamos los valores numéricos.

Aplicamos la ley de signos.

División de números enteros

Para dividir números enteros, primero se dividen los signos al igual que en la multiplicación, luego se dividen los valores.

Ley de signos de la división

$(+) \div (+) = +$
$(+) \div (-) = -$
$(-) \div (+) = -$
$(-) \div (-) = +$

Ejemplo 1

Dividir los siguientes números enteros.

a) $(+16) \div (-4) = -4$

Dividimos los valores numéricos.

Aplicamos la ley de signos.

b) $(+12) \div (+3) = 4$

Dividimos los valores numéricos.

Aplicamos la ley de signos.

Ejemplo 2

Resolver los ejercicios combinados.

$(-) \cdot (-) = +$
$3 \cdot 5 = 15$

$(-) \cdot (-) = +$
$12 \div 3 = 15$

a) $\underbrace{(-3) \cdot (-5)}_{\boxed{15}} + \underbrace{(-12) \div (+3)}_{\boxed{-4}} - \underbrace{(-6) \cdot 0}_{\boxed{0}}$

$= +\ 15 + (-4)\ -0$

$= +\ 15 - 4\ -0$

$=11$

Primero se realizan las multiplicaciones y divisiones; luego sumas y restas de izquierda a derecha.

b) $\underbrace{(-3) \cdot (-5)}_{\boxed{15}} - [\underbrace{-(-1)}_{\boxed{+1}} + \underbrace{(5 -3)}_{\boxed{2}} \div (-2)]$

$= 15-[+1+\underbrace{2 \div (-2)}]$

$= 15 - [+1 -1]$

$= 15 - 0$

$= 15$

$\{[(a)]\}$

- Primero se resuelve lo que está dentro del paréntesis.
- Segundo se resuelve corchetes.
- Tercero se resuelve llaves.

Fijamos lo aprendido resolviendo los siguientes ejercicios:

1. Multiplicamos o dividimos los siguientes números enteros en nuestro cuaderno

a) $(+10) \cdot (-4) =$

b) $(-24) \cdot (-2) =$

c) $(+2) \cdot (-4) =$

d) $(+10) \cdot (-4) =$

e) $(-84) \div (+2) =$

f) $(-60) \div (+12) =$

2. Resolvemos ejercicios combinados

a) $(-10) \div 8 -2 + (-4) \cdot (-4) +1$

b) $(+24) \div 8 -12 +12 \cdot (-2) + 7$

c) $8 - [6 - (-2 +5)] -5$

d) $(-6) \div 2 -[(-12) \cdot 2 + (4-32) \div 4] + 10$

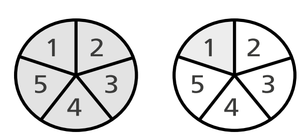
Números fraccionarios

Definición: Una fracción es un número, que se obtiene de dividir un entero en partes iguales.

Línea de fracción $\dfrac{6}{5}$ ← Numerador / ← Denominador

Ejemplo 1

Línea de fracción $\dfrac{6}{5} = \dfrac{\text{Cuantas partes se tomará del Entero}}{\text{En cuantas partes se dividirá el Entero}}$



$\dfrac{5+1}{5} = \dfrac{6}{5}$

Clases de fracciones

Propias: Son aquellas donde el numerador es menor que el denominador.

Ejemplo 2

$\dfrac{4}{15}$ ← Numerador / ← Denominador

$\dfrac{3}{5}$ ← Numerador / ← Denominador

$\dfrac{33}{111}$ ← Numerador / ← Denominador

Impropias: Son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador.

$$\frac{23}{12} = \frac{Numerador}{Denominador} \qquad \frac{7}{2} = \frac{Numerador}{Denominador} \qquad \frac{34}{11} = \frac{Numerador}{Denominador}$$

Aparentes: Son aquellas que en numerador y denominador son iguales. También la conocemos como fracciones enteras o fracciones igual a la unidad.

$$\frac{33}{33} = \frac{Numerador}{Denominador} \qquad \frac{4}{4} = \frac{Numerador}{Denominador}$$

Mixta o número mixto: Se denomina así porque está compuesta una parte entera y una fracción, la parte fraccionaria tiene que ser propia.

$$Entero \rightarrow 3\ \frac{3}{11} = \frac{Numerador}{Denominador} \qquad Entero \rightarrow 5\ \frac{3}{22} = \frac{Numerador}{Denominador}$$

Homogéneas: Son aquellas que tienen igual denominador.

$$\frac{1}{12};\ \frac{2}{12};\ \frac{3}{12};\ \frac{4}{12};\ \frac{7}{12} \qquad \frac{13}{5};\ \frac{25}{5};\ \frac{53}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{47}{5}$$

Heterogéneas: Son aquellas que tienen diferentes denominadores.

$$\frac{13}{8};\ \frac{22}{7};\ \frac{33}{6};\ \frac{24}{5};\ \frac{7}{4}$$

Decimales: Son las que tienen como denominador a una potencia de diez.

$$\frac{1}{10};\ \frac{2}{100};\ \frac{3}{1000};\ \frac{4}{10.000};\ \frac{7}{1.000.000}$$

Un décimo, dos centésimos, tres milésimos, cuatro diez milésimos, siete millonésimos.

Fracción generatriz de un número decimal

Se divide el número sin coma, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales.

Ejemplo 1. ¿Cuál es la fracción generatriz del número decimal 0,6?

$x = 0{,}6$ — **Multiplicamos por 10** → $10x = 0{,}6 * 10$ → $10x = 6$

Despejamos la incógnita.

$$x = \frac{6}{10}$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Simplificamos

Ejemplo 2. ¿Cuál es la fracción generatriz del número decimal 2,5?

$x = 2{,}5$

Multiplicamos por 10

$10\,x = 2{,}5 * 10$

$10\,x = 25$

$$x = \frac{25}{10}$$

Simplificamos

$$x = \frac{5}{2}$$

Fracción generatriz de un número decimal periódico puro

Ejemplo 1. ¿Cuál es la fracción generatriz de un número decimal de 2,11111…?

$x = 2{,}11111\ldots$

$x = 2{,}\hat{1}$

$$x = \frac{21 - 2}{9} = \frac{19}{9}$$

Conversión de número mixto a fracción

Este número mixto: $9\,\frac{3}{5}$

Equivale a esta fracción impropia: $= \frac{48}{5}$

Ejemplo 2. Convertir de un número mixto a una fracción

Debe multiplicar el denominador con el número entero.

$$9\,\frac{3}{5}$$

$$= \frac{(9 * 5) + 3}{5}$$

$$= \frac{(45) + 3}{5}$$

Sumamos con el numerador.

Denominador se mantiene.

$$= \frac{48}{5}$$

Ejemplo 3

Debe multiplicar el denominador con el número entero.

$$4\,\frac{3}{7}$$

$$= \frac{(28) + 3}{5}$$

Sumamos con el numerador.

Denominador se mantiene.

$$= \frac{31}{5}$$

Ejemplo 4

Debe multiplicar el denominador con el número entero.

$$1\ \frac{2}{3}$$

$$= \frac{(1 * 3) + 2}{3}$$

$$= \frac{(3) + 2}{3}$$

Sumamos con el numerador.

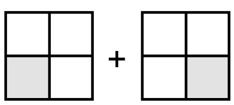
Denominador se mantiene.

$$= \frac{5}{3}$$

Convertir un número mixto a una fracción:

a) $1\ \frac{3}{7}$ **b)** $3\ \frac{4}{5}$ **c)** $2\ \frac{4}{9}$ **d)** $2 = \frac{2}{9}$

Suma de fracciones con el mismo denominador



$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ = FRACCIONES HOMOGÉNEAS

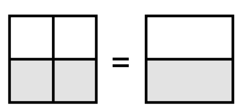
Son aquellas que tienen igual denominador.

Ejemplo 1

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1 + 1}{4}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Ejemplo 2

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$$

$$= \frac{3 + 2}{8}$$

$$= \frac{5}{8}$$

Ejemplo 3

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3 + 6}{4}$$

$$= \frac{9}{4}$$

Ejemplo 4

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1 + 1 + 5}{4}$$

$$= \frac{7}{4}$$

Suma de fracciones de distintos denominadores

$\frac{12}{5}$, $\frac{8}{3}$ FRACCIONES HETEROGÉNEAS

Son aquellas que tienen distinto denominador.

Ejemplo 1 $\frac{1}{3} + \frac{7}{4} =$

12 ÷ 3 = 4 ; luego
4 · 1 = 4

Multiplicamos 3 · 4

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{4} = \frac{4 + 21}{12}$$

12 ÷ 4 = 3 ; luego
3 · 7 = 21

$$= \frac{25}{12}$$

Ejemplo 2 $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} =$

12 ÷ 3 = 4 ; luego
4 · 4 = 16

Multiplicamos 3 · 4 = 12

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{16 + 15}{12}$$

12 ÷ 4 = 3 ; luego
3 · 5 = 15

$$= \frac{31}{12}$$

Ejemplo 3 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

12 ÷ 2 = 4 ; luego
4 · 1 = 4

Multiplicamos 2 · 4 = 8

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4 + 2}{8}$$

8 ÷ 4 = 2 ; luego
2 · 1 = 2

$$= \frac{6}{8}$$

Resta de fracciones

Resta de fracciones homogéneas

Ejemplo 1

$$\frac{12}{5} - \frac{8}{5} = \frac{12 - 8}{5} = \frac{4}{5}$$

Ejemplo 2

$$\frac{22}{7} - \frac{8}{7} = \frac{22 - 8}{7} = \frac{14}{7}$$

Para la resta de fracciones homogéneas se sigue los mismos pasos que la suma de fracciones.

Resta de fracciones heterogéneas

Ejemplo 1

$$\frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{48 - 45}{20} = \frac{3}{20}$$

Ejemplo 2

$$\frac{11}{7} - \frac{5}{6} = \frac{66 - 35}{42} = \frac{31}{42}$$

Seguimos los mismos pasos de la suma de fracciones heterogéneas.

Multiplicación de fracciones

Se multiplica numerador con numerador; denominador con denominador.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo 1

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{3}=\frac{9\cdot 5}{4\cdot 3}=\frac{45}{12}=\frac{15}{4}$$

Ejemplo 2

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3}=\frac{1\cdot 7}{4\cdot 3}=\frac{7}{12}$$

Ejemplo 3

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3\cdot 1}{5\cdot 8}=\frac{3}{40}$$

División de fracciones

Para dividir se cambia de posición al divisor (numerador por denominador); luego se cambia el signo (÷) por (·)

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo 1

$$\left(\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{4}{3}\div\frac{1}{8}=\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{1}=\frac{32}{3}$$

Ejemplo 2

$$\frac{3}{5}\div\frac{9}{2}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5}\cdot\frac{2}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{2}{15}$$

Ejemplo 3

$$\frac{3}{8}\div\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{1}=\frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,4}}=\frac{3}{4}$$

Aplicación en la vida

Durante la cuarentena rígida, Marcelino realiza las compras en el mercado "El Molino" del departamento de Tarija, donde compró los siguientes productos.

$\frac{1}{4}$ kg de tomate. $3\frac{1}{2}$ kg de choclos.

$\frac{3}{4}$ kg de queso. $3\frac{2}{5}$ kg de tomates.

6 kg de papa. $\frac{1}{2}$ kg de zapallo.

¿Cuántos kilogramos de productos compró en total Marcelino?

Convertimos los números mixtos en número fraccionarios.

Choclos $3\frac{1}{2} = \frac{(3 \cdot 2) + 1}{2} = \frac{7}{2}$

Tomates $3\frac{2}{5} = \frac{(3 \cdot 5) + 2}{5} = \frac{17}{5}$

Recuerda: Todos los números tienen como denominador a la unidad.

Sumamos todos los productos.

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{7}{2} + \frac{17}{5} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{5 + 15 + 70 + 68 + 10 + 120}{20} = \frac{\overset{\overset{72}{\cancel{144}}}{288}}{\underset{\underset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{20}}} = \frac{72}{5}$$

Respuesta: Marcelino cargará $\frac{72}{5}$ kg.

Analicemos y apliquemos lo aprendido, identificando la importancia en el diario vivir.

Doña Gabina va al mercado de Punata y realiza la siguiente compra:

a) 2 Kg de carne
b) 1/2 kg de pollo
c) 1/4 Kg de verduras
d) 1/8 Kg de fruta

3. VALORACIÓN

1. ¿Qué aspectos de nuestra vida cotidiana pueden ser resueltos o facilitados a través de la conversión de números mixtos en números fraccionarios?

....

....

2. ¿Cómo cuadyuva el conocimiento de las fracciones en el desenvolvimiento económico y distributivo de las actividades productivas de nuestra comunidad?

....

....

3. Analicemos y mencionemos cómo afecta no conocer fracciones en los emprendimientos.

....

....

4. PRODUCCIÓN

1. Investiguemos cuáles son las potencialidades locales.

....

....

....

....

2. Realicemos una relación fraccionaria familiar, según la cantidad en porción sobre el consumo de cada integrante de tu familia, para saber la cantidad que corresponde en el consumo de diferentes alimentos.

....

....

....

....

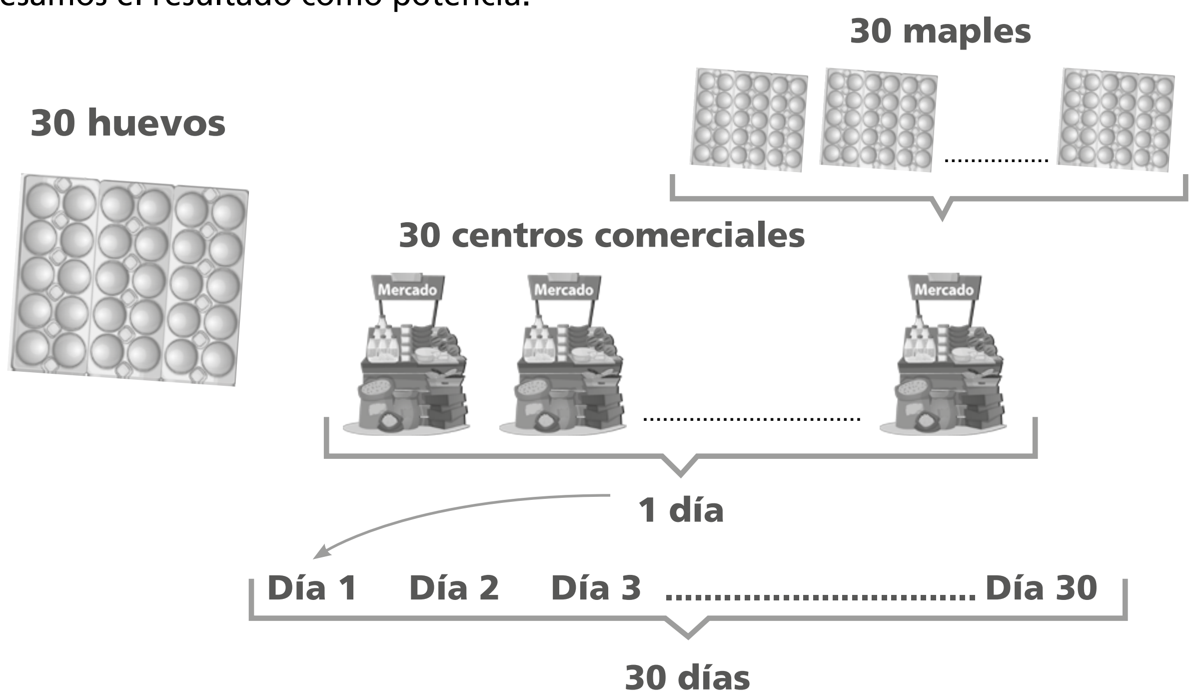
UNIDAD 2
POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

1. PRÁCTICA

Cómo muchos jóvenes hoy en día que al margen de dedicarse a estudiar, deben trabajar para poder costear su formación académica y así en un futuro aportar en el desarrollo de su comunidad y su país. Este es el caso de Carlos, un estudiante de provincia que ayuda a su familia en la crianza de gallinas, entre otras cosas que se realizan en el campo, uno de sus ingresos importantes es la venta de huevos a las tiendas y centros comerciales de las ciudades de El Alto y La Paz.

Si Carlos entrega maples de 30 huevos en 30 centros comerciales en cantidad de 30 maples por día. ¿Cuántos huevos distribuyó en el mes de septiembre?

Expresamos el resultado como potencia.



2. TEORÍA

Potenciación de número enteros

Las potencias están formadas por la base y el exponente.

EXPONENTE

BASE $\rightarrow$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Recordamos:

- El exponente determina la cantidad de veces que se multiplica la base.

Ejemplo de aplicación de una potencia

En el C.E.A. "Villa Abecia" del Departamento de Chuquisaca dos participantes juegan una partida de ajedrez, donde uno de ellos desea conocer la cantidad de cuadrados que tiene un tablero, sin la necesidad de contarlos uno a uno, tomando en cuenta que cada lado tiene 8 cuadrados podemos calcular la cantidad.

$8^2 = 64$

$8 \cdot 8 = 64$

El 8 se repite la cantidad de veces que indica el exponente; en este caso 2 veces.

Respuesta: La cantidad de cuadrados es de 64.

¿Cómo resolver una potencia?

Ejemplo 1. Resolver: 3^4

$\mathbf{3^4}$ Esto significa que tenemos que multiplicar 4 veces la base 3:

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}$$

$$3^4 = \underbrace{9 \cdot 9}$$

$$3^4 = 81$$

Entonces:

$$\mathbf{3^4 = 81}$$

Casos en una potencia

1	Si el exponente es cero "0", el resultado siempre será 1.	$3^0 = 1$
2	Si la base es positiva, el resultado siempre será positivo.	1) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ 2) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
3	Si la base es negativa, pero tiene exponente par, el resultado será positivo.	$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
4	Si la base es negativa, pero tiene exponente impar, el resultado será negativo.	$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Fijando lo aprendido (Aplicamos el CASO 2)

Actividad 1

$3^4 = \square \times \square \times \square \times \square = \square$

$2^5 = \square \times \square \times \square \times \square \times \square = \square$

$2^6 = \square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square = \square$

Ejemplo 2. (Aplicamos el CASO 4)

Resolver: $(-4)^3 =$

Esto significa que tenemos que multiplicar 3 veces la base 4:

$$\mathbf{(-4)^3} = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$$
$$= -64$$

Como la base es ***NEGATIVA*** y el exponente es ***IMPAR***, el resultado será ***NEGATIVO***.

Entonces: $\mathbf{(-4)^3 = -64}$

Ejemplo 3. (Aplicamos el CASO 3)

Resolver: $(-3)^2 =$

Esto significa que tenemos que multiplicar 2 veces la base 3:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3)$$
$$= 9$$

Como la base es ***NEGATIVA*** y el exponente es ***PAR***, el resultado será ***POSITIVO***

Entonces: $\mathbf{(-3)^2 = 9}$

Ejemplo 4. (Aplicamos el CASO 1)

Resolver: 16^0=

Todo número con exponente ***0*** es igual a ***1***.

Entonces: $\mathbf{16^0 = 1}$

Actividad 2:

Completa la tabla con los cuadrados de los 10 primeros Números Naturales:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
					36				

Actividad 3:

Completa la tabla con los cubos de los Números Naturales:

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
					216				

Actividad 4:

Completa la tabla de potencias mixtas de los siguientes Números Naturales:

6^1	2^4	5^5	98^1	3^6	2^8	17^2	12^3	0^3	7^3

Actividad 5:

Completa la tabla de potencias con las bases positivos y negativos de los siguientes Números Naturales

$(-3)^3$	$(-3)^4$	$(-8)^2$	$(-4)^3$	$(-4)^2$	$(-1)^2$	$(-4)^5$	$(-2)^4$	$(-1)^7$

Actividad 6:

Pintemos con el mismo color la respuesta que corresponda a la potencia.

$(-3)^4$		7^3
	2^5	
8^2		$(-4)^2$
	35^0	

	16	
343		64
	1	
81		32

Radicación de números enteros

Es la operación inversa de la potenciación. $\sqrt{x}$

Partes de una raíz →

Índice de la raíz

Raíz o resultado

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

Signo radical

Radicando

3 es la raíz cuarta de 81 $\longleftrightarrow (3)^4 = 81$

Las raíces más conocidas son:

Raíz cuadrada	Raíz cúbica
$\sqrt{81} = \pm 9$	$\sqrt[3]{27} = 3$
El índice es 2, pero no se anota se sobre entiende	El índice es 3

¿Cómo se resuelve?

Ejemplo 1

1) Resolver: $\sqrt[2]{81} =$

Tenemos que buscar un número que multiplicado 2 veces nos dé el resultado 81. $\sqrt[2]{81}$

$(9)^2 = (9) \times (9) = 81$

Entonces $\sqrt[2]{81} = \pm 9$

2) Resolver: $\sqrt[3]{125} =$

Tenemos que buscar un número que multiplicado 3 veces nos de el resultado 125. $\sqrt[2]{125}$

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

Entonces $\sqrt[3]{125} = 5$

3) Resolver: $\sqrt[3]{-125} = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 \quad \Rightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$

Actividad 1:

Completemos la tabla de raíces cuadradas de los siguientes ejemplos:

$\sqrt{25}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{225}$	$\sqrt{400}$
$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	± 1	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$

Encontremos las respuestas de los siguientes ejercicios en la sopa de letras.

$\sqrt{25}$	2^4	3^3	$\sqrt{49}$	4^3	$\sqrt{100}$	5^2	41^0	$\sqrt{625}$	$\sqrt{36}$

1	22	0	33	36	67	41
80	26	20	6	24	18	46
54	37	27	2	5	3	99
15	49	34	27	16	66	81
92	42	12	10	4	80	45
15	30	7	85	29	52	56
8	40	25	64	1	12	50
30	35	9	30	25	11	26

3. VALORACIÓN

1. ¿Cuál es la importancia en la industria el conocer la potenciación para optimizar los espacios de almacenamiento?

R. ....

2. ¿De qué manera lo aprendido se refleja en nuestro contexto para el cálculo de volúmenes o superficies?

R. ....

3. ¿Cuál es la importancia de poder aplicar estos conocimientos con otras ramas de la ciencia?

R. ....

4. PRODUCCIÓN

1. Recurrimos a las vocaciones o actividades productivas que hay en tu contexto y aplica el conocimiento que adquiriste.

R. ....

....

....

....

....

....

....

2. Elaboremos un cuaderno de notas de bolsillo optimizando los tamaños según la medida en $cm^{2.}$

UNIDAD 3

RAZONES Y PROPORCIONES EN EL MANEJO DE LOS RECURSOS NATURALES

1. PRÁCTICA

En el CEA de la comunidad Wilson Mejía del departamento de Pando se observó la necesidad de organizar los materiales de escritorio que se tenían. Entonces Juan y Lizeth decidieron construir estantes utilizando materiales de su contexto aplicando sus conocimientos en proporciones; el impacto fue muy positivo para la comunidad, porque lograron construir dos estantes de madera con las iniciales W y M.

A partir de la experiencia descrita responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué conocimientos se requiere para calcular las medidas de los estantes como se muestra en las imágenes?

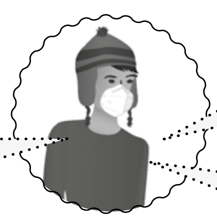
R. ....

2. Dialogamos sobre las actividades productivas de nuestra comunidad que consideramos que requieren conocimientos en proporciones.

R. ....

2. TEORÍA

Entonces hoy es el día para aprender razones y proporciones.



Pero… ¿Qué son las razones?

Aquí te doy unas respuestas y tu pintarás la correcta.

Es la igualdad de dos razones y pueden ser de dos clases.	Es una comparación entre dos cantidades mediante una división.	Es encontrar un número desconocido.

1. ¿Qué es una razón para ti?

R. ....

2. ¿Cómo la aplicarías en matemáticas?

R. ....

Las proporciones son

La igualdad de dos razones.	La igualdad de dos cantidades con el mismo valor.	Una desigualdad comparativa de números.

Proporciones aritméticas

Igualdad de dos razones aritméticas
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
Se lee: "*a*" es a "*b*", como "*c*" es a "*d*"
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ⟶ Medios ⟶ Extremos

Propiedades:

El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Fijamos lo aprendido mediante la resolución de los ejercicios

Actividad 1:

En las siguientes proporciones determinar los extremos y medios:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	*a, d son: EXTREMOS* *b, c son: MEDIOS*	$\frac{1}{b} = \frac{c}{d}$	*1, 4 son:* *2, 3 son:*
$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$		$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$	

Ejemplo 1

Encontrar el valor de x, en la siguiente proporción:

Tenemos la siguiente proporción:	$\frac{3}{5} = \frac{x}{15}$

Multiplicando en forma cruzada tendremos:	$3 \cdot 15 = 5 \cdot x$ $45 = 5 \cdot x$
Hacemos la transposición de términos:	$5 \cdot x = 45$
Despejando la "x" nos queda:	$x = \frac{45}{5}$
Haciendo la división nos da el resultado:	$x = 9$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de "x", en la siguiente proporción:

Tenemos la siguiente proporción:	$\frac{x}{4} = \frac{15}{20}$
Multiplicando en forma cruzada tendremos:	$x \cdot 20 = 4 \cdot 15$ $x \cdot 20 = 60$
Despejando la "x" nos queda:	$x = \frac{60}{20}$
Realizando la división nos da el resultado:	$x = 3$

Actividad 2:

a) Encontrar el valor de "x", en la siguiente proporción:

Tenemos la siguiente proporción:	$\frac{4}{5} = \frac{x}{20}$	R.

b) Encontrar el valor de "x" en la siguiente proporción:

Tenemos la siguiente proporción:	$\frac{x}{25} = \frac{7}{35}$	R.

Resolvemos problemas de aplicación:

Situación problémica 1

Doña Susana tiene que preparar un delicioso chicharrón de cerdo para un total de 75 comensales, tiene una receta para 30 personas donde indica 8 kilos de carne. ¿Cuántos kilos de carne de cerdo necesitará para 75 personas?

Tiene una receta para 30 personas donde indica 8 kilos de carne. $\frac{30}{8}$

Tiene que preparar para 75 personas, ¿Cuántos kilos de carne necesita? $\frac{75}{x}$

Igualamos ambas cantidades y resolvemos: $\frac{30}{8} = \frac{75}{x}$

$$x \cdot 30 = 8 \cdot 75$$

$$x \cdot 30 = 600$$

$$x = \frac{600}{30}$$

$$x = 20$$

Solución: Entonces, Doña Susana necesitará 20 kilogramos de carne de cerdo.

Actividad 3:

El grupo musical los Kjarkas ensaya 8 horas para sacar 2 canciones nuevas. ¿Cuántas horas de ensayo necesitan para sacar 9 canciones nuevas?

Ensaya 8 horas para sacar 2 canciones	
¿Cuántas horas ensayarán para sacar 9 canciones?	
Igualamos ambas cantidades y resolvemos:	
R.	

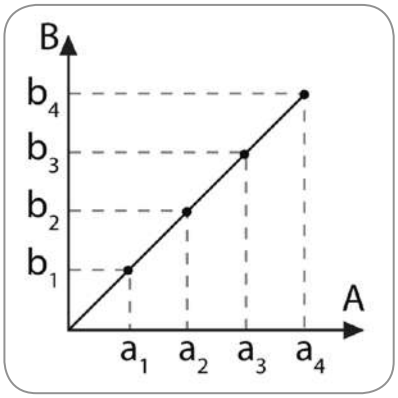
¿Qué es una magnitud?

Magnitud es todo aquello que se puede medir, representar por un número y mediante el proceso de medida le asignamos unos valores (números) a esas unidades.

Magnitudes directas

DIRECTAS

Dos magnitudes son directamente proporcionales, si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número.



$$\frac{A}{B} = K$$

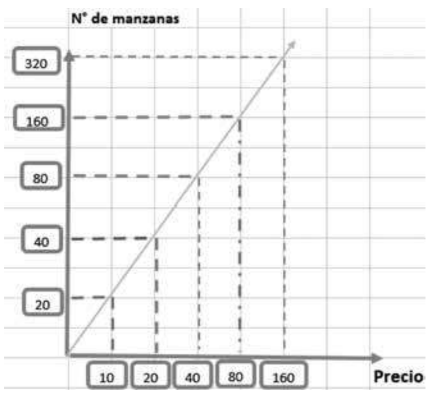
K = Constante de proporcionalidad.

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4}$$

Ascendente: Cuando un número va aumentando.
Descendente: Cuando un número va disminuyendo.

Ejemplo 1

Juan y Pedro están en el mercado campesino de Sucre; desean comprobar si la siguiente tabla corresponde a las magnitudes directamente proporcionales.



x2 x4 x8 x16

N° de Manzanas	20	40	80	160	320
Precio	10	20	40	80	160

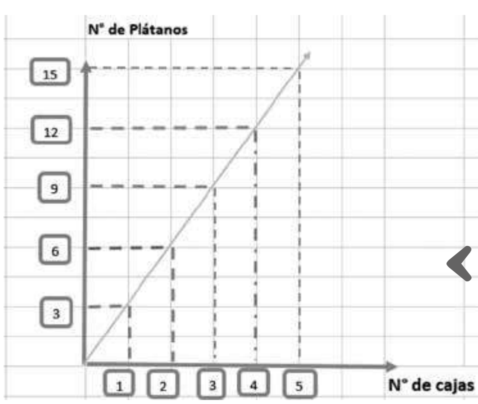
x2 x4 x8 x16

Gráfico

$$\frac{20}{10} = \frac{40}{20} = \frac{80}{40} = \frac{160}{80} = \frac{320}{160} = k = 2$$

Ejemplo 2

Alicia compra cierta cantidad de cajas de plátano para vender en el mercado del centro de Villa Serrano y desea comprobar si la siguiente tabla de magnitudes es directamente proporcional.



x2 x3 x4 x5

N° de Plátanos	3	6	9	12	15
N° de cajas	1	2	3	4	5

x2 x3 x4 x5

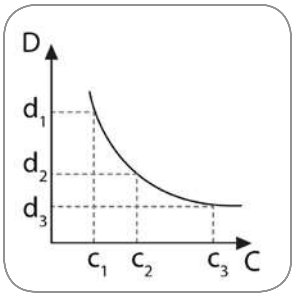
Gráfico

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{3} = k = 3$$

Magnitudes inversamente proporcionales

INVERSAS

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una disminuye la otra y si al disminuir una aumenta la otra.



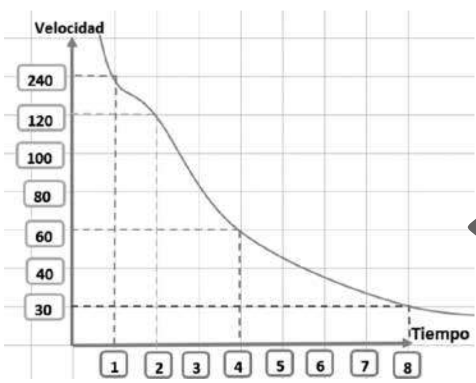
C × D = K

K = Constante de proporcionalidad.

$$d_1 \cdot c_1 = d_2 \cdot c_2 = d_3 \cdot c_3$$

Ejemplo 1

Esteban y Marta viajan en la carretera diagonal Jaime Mendoza, desde Padilla hasta la ciudad de Sucre y desean calcular el tiempo que tardarán en llegar a su destino, tomando en cuenta su velocidad. Analiza el siguiente gráfico.



Gráfico

x2 *x4* *x8*

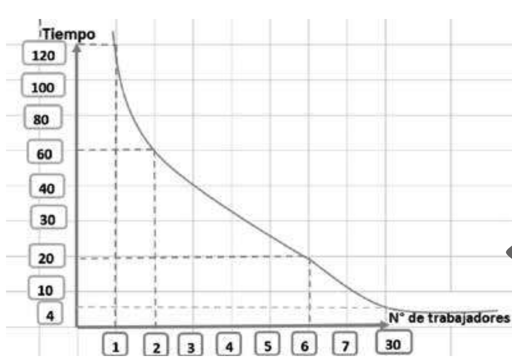
Velocidad	30	60	120	240
Tiempo	8	4	2	1

÷ 2 *÷ 4* *÷ 8*

$$30 \cdot 8 = 60 \cdot 4 = 120 \cdot 2 = 240 \cdot 1$$

Ejemplo 2

En la nueva terminal metropolitana de la ciudad de El Alto, los albañiles desean terminar su trabajo en menor tiempo, por lo cual deciden contratar más trabajadores. Analiza los siguientes datos y la gráfica.



Gráfico

x2 *x6* *x30*

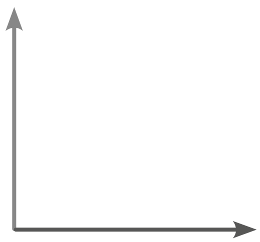
N° de trabajadores	1	2	6	30
Tiempo (años)	120	60	20	4

÷ 2 *÷ 6* *÷ 30*

$$1 \times 120 = 2 \times 60 = 6 \times 20 = 30 \times 4 = 120$$

Completar las siguientes tablas de magnitudes directas e inversas y gráfica en el sistema

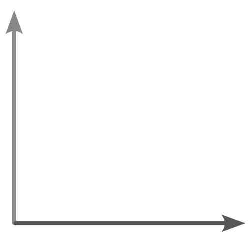
1. Si compramos lápices cada uno a Bs 2; al analizar como varia el valor de costo total, cuando el número de lápices varía, se tendrá.



Gráfico

Costo Total	2	6	48
N° de lápiz	1	3	24

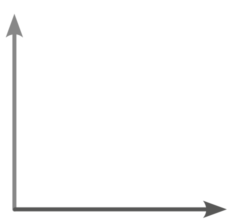
2. En el mercado los Pozos, los guardias municipales están comprobando el precio según el peso (Kg). Grafica la tabla.



Gráfico

Precio	2	4	6	10
Peso (kg)	1	2	3	5

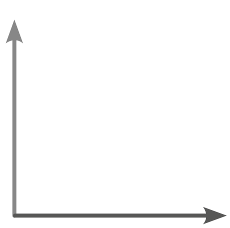
3. Las autoridades educativas entregarán mobiliario al C.E.A. "Salinas" del departamento de Oruro, el auto en el que transita por la doble vía La Paz- Oruro, tiene una velocidad de 20 km/h y se demora 8 horas, si duplica su velocidad, ¿Cuánto se demorará?. Como duplica su velocidad; se demorará menos tiempo en recorrer el mismo tramo específicamente la mitad del tiempo. Grafica la tabla.



Gráfico

Velocidad	20	40	80
Tiempo	8	4	2

4. Martina desea viajar de La Paz a Oruro, en su automóvil, a una velocidad de 20 m/s ; grafica la tabla.



Gráfico

Velocidad	20	40	80
Tiempo	8	4	2

Proporcionalidad directa (regla de tres simple directa)

La regla de tres con magnitudes directamente proporcionales se resuelve multiplicando una proporción en forma de cruz.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo 1

Un pintor tarda 5 horas en pintar 25 cuadros ¿Cuánto tiempo tardará en pintar 115 cuadros?

Solución

Despejamos la X

$$\frac{5 \text{ HORAS}}{25 \text{ CUADROS}} = \frac{X}{115 \text{ CUADROS}} \Rightarrow 5 \cdot 115 = 25 \cdot X$$

$$X = \frac{5 \cdot 115}{25} \rightarrow X = 23$$

R.- Pinta 115 cuadros en 23 horas

Ejemplo 2

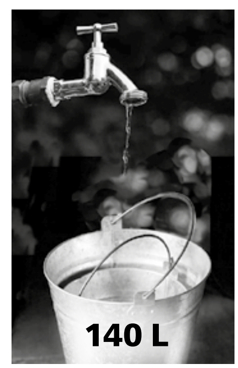
Juan deja el grifo (pila) abierto, se vierten 140 litros de agua en 15 minutos. ¿Cuántos litros se vierten en una hora?

Solución

$$\frac{140}{15} = \frac{X}{60} = 140 \cdot 60 = 15 \cdot x$$

$$X = \frac{140 \cdot 60}{15} \rightarrow X = 560$$

t = 15 min



R.- En una hora se vertirán 560 litros

Proporcionalidad inversa (regla de tres inversa)

La regla de tres con magnitudes inversamente proporcionales se resuelve multiplicando los dos primeros factores y dividimos por el tercero.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot b = c \cdot d$$

Ejemplo 1

Juana sale de su pueblo en el colectivo a una velocidad de 120 Km/h, tarda 3 horas en recorrer el trayecto de Sucre a Potosí ¿Si la velocidad fuera de 180 Km/h qué tiempo tardaría?

Solución

$$\frac{120\ km/h}{3h} = \frac{180\ km/h}{x}$$

$$120 \cdot 3 = 180 \cdot x$$

$$X = \frac{120 \cdot 3}{180} \longrightarrow x = 2$$

R.- Tardaría 2 horas

Ejemplo 2

En el Batallón del Área Naval N° 3 "Bermejo" Departamento de Tarija, unos 70 soldados cavan una trinchera en 10 días. ¿Cuántos días tardarán si trabajan 35 soldados?

$$\frac{70\ soldados}{10\ días} = \frac{35\ soldados}{x}$$

$$\therefore 70 \cdot 10 = 35 \cdot x \qquad X = \frac{\overset{2}{\cancel{70}} \cdot 10}{\underset{1}{\cancel{35}}} \rightarrow X = 20$$

R.- Tardarían 20 días

Fijamos lo aprendido

En tu cuaderno, resuelve los problemas y analiza si se trata de proporcionalidad directa o inversa.

1. Para tener un desayuno nutritivo, una madre utiliza 7 naranjas y obtiene 3 vasos de jugo. ¿Para obtener 15 vasos de jugo cuántas naranjas necesita?

   R.-

2. Al construir la Catedral de Santa Cruz, 5 obreros abren una zanja de 80 metros. ¿Cuántos metros abrirán 9 obreros?

   R.-

3. Un cunicultor de Tarija vende cierto número de conejos por Bs 45, por cada Bs 100 gana Bs 12. ¿Cuánto le costaron los conejos?

   R.-

4. Cuando construimos las viviendas sociales, 8 albañiles hacen una obra en 30 días ¿Cuánto tardarán en hacer la misma obra 15 obreros?

   R.-

5. Un grifo vierte 150 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuánto tiempo es necesario para obtener 900 litros?

   R.-

6. Una camioneta a una velocidad de 50 km/h, tarda 6 horas en recorrer la distancia de Santa Cruz a Valle Grande, por la carretera ¿Cuánto tardaría en recorrer la misma distancia si la velocidad fuera 60 km/h?

   R.-

Porcentaje (tanto por ciento)

El tanto por ciento es una forma de expresar un número como fracción con denominador 100; es decir, es una cantidad que corresponde proporcionalmente a una parte de cien.

$$\frac{\%}{100} = \frac{parte}{todo}$$

Ejemplo 1

En la huerta de Pedro, el 25% de un total de 80 naranjas están dañadas. ¿Cuántas naranjas están frescas?

Solución

25% Dañadas $\longrightarrow$ *100 - 25 = 75% Frescas*

$$\frac{75}{100} = \frac{x}{80} \longrightarrow x = \frac{\overset{15}{\cancel{75}} \cdot \overset{4}{\cancel{80}}}{\underset{1}{\cancel{100}}} = 60$$

R. 60 Naranjas Frescas

Ejemplo 2

El 18% de los estudiantes/participantes en el C.E.A "Minero A" de la ciudad de Santa Cruz son varones de un total de 250. ¿Cuántos participantes son mujeres?

Solución

$$\frac{18}{100} = \frac{x}{250} \qquad x = \frac{\overset{9}{\cancel{18}} \cdot \overset{5}{\cancel{250}}}{\underset{1}{\cancel{100}}} = 45 \text{ Varones}$$

$$250 - 45 = 205 \text{ Mujeres}$$

Porcentaje de una cantidad

Para saber qué porcentaje (%) es una cantidad de otra calculamos el cociente decimal y lo multiplicamos por 100.

Ejemplo 1

En el C.E.A. "Barbarita Paz Yamane" del departamento del Beni los participantes desean calcular el siguiente porcentaje:

¿Qué % es 3 de 25?

Se expresa en fracción. $\longleftarrow$ $\left\{ \frac{3}{25} \right. \cdot 100$ $\longrightarrow$ Se multiplica por 100.

Operación Auxiliar:

300	25
50	0,12
0	

Obtenemos el cociente decimal. $\longleftarrow$

$= 0,12 \cdot 100$

$= 12\ \%$

Ejemplo:

De los 125 participantes del C.E.A. "30 de agosto" del departamento de Pando, 45 son extranjeros ¿Qué % representa?

Se expresa en fracción. ← $\dfrac{45}{125} \cdot 100$ → Se multiplica por 100.

Obtenemos el cociente decimal. ←

$$\begin{array}{r|l} 450 & 125 \\ \cline{2-2} -375 & 0{,}36 \\ \cline{1-1} 750 & \\ -750 & \\ \cline{1-1} (0) & \end{array}$$

$$\% = 0{,}36 \cdot 100\ \%$$
$$= 36\%$$

1. ¿Qué porcentaje representa la tasa de analfabetismo de Bolivia?

   R.

2. ¿Cuán importante es ser responsable al momento de efectuar los cálculos de los porcentajes?

   R.

Actividad, resolver en el cuaderno

1. De acuerdo a los datos del Ministerio Público suman a 38 los hechos de feminicidio en el país, en lo que va de este 2021. En La Paz se registraron 10 casos, 8 en Santa Cruz, 7 en Cochabamba, 5 en Oruro, 3 en Potosí, 2 en Beni, 2 en Chuquisaca y 1 en Pando. ¿Qué porcentaje corresponde a cada departamento?

2. Julio tenía un sueldo mensual de Bs 2500 y le aumentaron el 4% en el año 2019 ¿Cuánto es el sueldo de Julio actualmente?

3. En Bolivia existe 10.027.643 de habitantes (datos estimados en 2007, 2008 y 2009). De 0 a 14 años: 35%. De 15 a 64 años: 60,4%. De 65 años o más: 4,6% ¿Qué cantidad de población recibirá la vacuna, tomando en cuenta los datos otorgados?¿Desde qué edad se vacunarán?

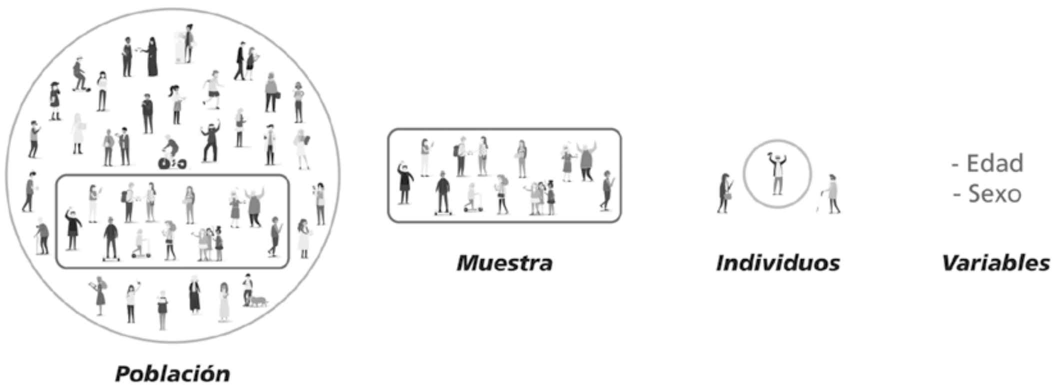
4. La Estancia "Gonzales" tiene 480 hectáreas y alquila 168 hectáreas ¿Qué porcentaje alquila?

5. En la empresa chocolatera Ceibo, hay una oferta del 10 % de descuento por la compra en todos sus productos, los precios son 10 Bs cocoa, chocolate con nuez 12 Bs. ¿Cuál sería el precio real?

6. En el C.E.A. “Torotoro” del departamento de Potosí, el 18% de los participantes usan lentes de un total de 250 ¿Cuántos participantes no usan lentes?

Estadística

La estadística es una parte de la matemática que se encarga de poder recolectar información, clasificarla e interpretar sus datos.



Población: conjunto total de personas, animales, objetos o elementos sobre los que se desea obtener una información.

Muestra: Parte del total de una población sobre la que se obtiene alguna información

Variable: Es una característica o un fenómeno observado de la población.

- Variable Estadística
  - Cuantitativa
    - Discreta
    - Contínua
  - Cualitativa
    - Nominal
    - Ordinal

Frecuencia absoluta y relativa

Ejemplo 1

En un C.E.A. se realiza una encuesta a un grupo de 30 participantes sobre su asignatura favorita.

VARIABLE	NÚMERO DE ESTUDIANTES	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA $fr = \frac{ni}{N}$	FRECUENCIA RELATIVA PORCENTUAL (%) $fr \cdot 100\ \%$
Matemática		$n_1 = 10$	$f_1 = \frac{10}{30} = 0{,}33$	$0{,}33 \cdot 100 = 33$
Lenguaje		$n_2 = 5$	$f_2 = \frac{5}{30} = 0{,}17$	$0{,}17 \cdot 100 = 17$
Sociales		$n_3 = 5$	$f_3 = \frac{5}{30} = 0{,}17$	$0{,}17 \cdot 100 = 17$
C. Naturales		$n_4 = 10$	$f_4 = \frac{10}{30} = 0{,}33$	$0{,}33 \cdot 100 = 33$
TOTAL		**N = 30**	**1**	**100**

1. ¿Cuántos estudiantes prefieren matemáticas?

   ....

2. ¿Qué porcentaje de participantes prefieren ciencias naturales?

   ....

3. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren lenguaje?

   ....

4. ¿Cuánto por ciento de participantes prefieren sociales?

   ....

La frecuencia absoluta nos indica la cantidad de veces que se repite cada opción.
La frecuencia relativa nos indica que parte del total corresponde a cada opción.

Actividad

1. Determinar las frecuencias absoluta y relativa e interpreta el porcentaje de las siguientes observaciones.

   Las edades de los participantes en un Centro de Educación Alternativa son:

   18, 25, 30, 25, 18, 30, 25, 18, 60, 18, 60, 25, 18, 30, 18, 25, 30, 60, 18, 25.

La frecuencia absoluta nos indica la cantidad de veces que se repite cada opción.

La frecuencia relativa nos indica que parte del total corresponde a cada opción.

VARIABLE	NÚMERO DE ESTUDIANTES	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA RELATIVA EN %
18 años				
25 años				
30 años				
60 años				
TOTAL				

2. Se encuesta a 80 participantes sobre su deporte favorito y obtenemos las siguientes respuestas:

   30 participantes prefieren fútbol, 20 participantes prefieren natación, 18 participantes prefieren ciclismo y a 12 participantes no les gusta el deporte.

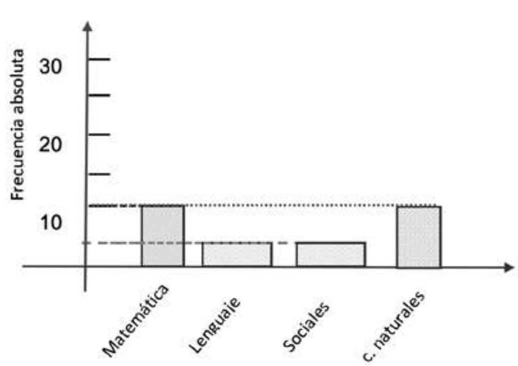
Gráficas

Diagrama de barras

Consiste en levantar sobre cada valor de la variable una barra cuya longitud coincida con su frecuencia.

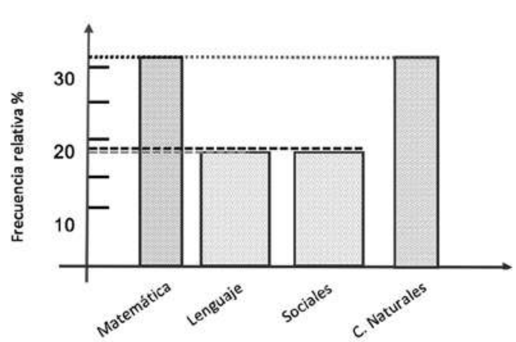
Grafiquemos el diagrama de barras del primer ejemplo sobre la asignatura favorita de los participantes.

Gráfica de frecuencia absoluta



VARIABLE	FRECUENCIA ABSOLUTA
Matemática	10
Lenguaje	5
Sociales	5
C. Naturales	10
TOTAL	**30**

Gráfica de frecuencia relativa %



VARIABLE	FRECUENCIA RELATIVA %
Matemática	33
Lenguaje	17
Sociales	17
C. Naturales	33
TOTAL	**100**

Fijamos lo aprendido con las siguientes actividades

1.- Grafica el diagrama de barras del ejercicio 1 de las edades de los participantes de un centro de educación alternativa.

Gráfica de frecuencia absoluta

VARIABLE	FRECUENCIA ABSOLUTA
18 años	
25 años	
30 años	
60 años	
TOTAL	

Gráfica de Frecuencia Relativa %

VARIABLE	FRECUENCIA RELATIVA %
18 años	
25 años	
30 años	
60 años	
TOTAL	

Medidas de centralización

a) La media aritmética

La media aritmética o promedio es un conjunto de resultados, es el cociente entre la suma de los valores de los resultados y la suma de las frecuencias.

Actividad 1

Encontrar la media aritmética de las calificaciones de un participante, los cuales son: 80,70, 60, 90.

Tomando en cuenta la nota de aprobación de 51 pts.

Solución:

La media aritmética simbolizamos por **P**.

$$P = \frac{\textit{suma de las calificaciones}}{\textit{cantidad de calificaciones}} = \frac{80 + 70 + 60 + 90}{4} = \frac{300}{4} = 75$$

La media aritmética de las cuatro calificaciones del participante es **75**.

Ejercicio 1

Halla la media aritmética de las edades de los participantes, sabiendo que son: 18, 30, 25, 60, 40.

b) La moda

Es el valor del resultado que más veces se obtiene, o el resultado de mayor frecuencia (la moda puede no existir en muchos casos)

Ejemplo 1

Hallar la moda de los siguientes números 5, 2, 3, 4, 5, 2, 5, 5, 5, 8

Solución:

El número que más se repite es 5, por lo tanto, la moda es 5.

Ejemplo 2

Determinar la moda de las siguientes observaciones de las siguientes edades 25,26, 27, 25, 31, 25, 40.

c) La mediana

Es la semisuma entre dos valores medios obtenidos o también el valor obtenido que está en el centro de la observación.

Determinamos la mediana de los siguientes números:

Ejemplo 3

Cuando el número de observación es impar. 5, 8, 6, 2, 9, 3, 4.

Solución:

5, 8,6,2,9,3,4

Ordenando de menor a mayor es 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9

La mediana es **5**

Ejemplo 4

Cuando el número de observaciones es par.

20, 30, 40, 25, 15,12

Solución:

Ordenando de menor a mayor es: 12, 15, 20, 24, 30, 40

La mediana sería $= \dfrac{20 + 24}{2} = \dfrac{44}{2} = \mathbf{22}$

Actividad

1. Determinar la mediana de las siguientes observaciones de edades de 5 participantes.

   Pedro 24 años, José 30 años, Félix 18 años, Juan 26 años, Alicia 25 años.

R. ....

- Aplicamos la media y la moda con los hombres y mujeres entre las edades de 30 a 45 años de mi comunidad, contexto o región.
- Analizamos y aplicamos si en una tienda de ropa queremos saber qué tipo de camisas se debe producir más que las otras, entonces vemos de las observaciones de camisas vendidas cuál es la que más se repite.
- Aplicamos la media para calcular el promedio de notas o calificaciones, entonces el promedio es la suma de elementos dividido entre la cantidad de elementos.
- Aplicamos la moda si tenemos un grupo de notas académicas y queremos saber qué valor corta los datos; de manera que el 50% este por debajo del mismo y el otro 50% por encima entonces tomamos la mediana.

3. VALORACIÓN

1. Mencionamos desde nuestra percepción que tan importante es el trabajar con las relaciones y proporciones

R. ....

2. ¿Qué utilidad tienen las reglas aprendidas sobre proporcionalidad inversa y directa en tu contexto?

R. ....

1. Menciona la importancia de usar las estadísticas cuando se debe tomar una decisión.

R. ....

2. ¿Qué tan importante es la interpretación de gráficas de los ejercicios planteados en estadísticas para hacer una lectura contextual?

R. ....

3. ¿Cómo se puede moldear el rumbo de la historia y decisiones de impacto tomando en cuenta la estadística?

R. ....

4. PRODUCCIÓN

1. Proponemos ¿Cómo podemos realizar nuestras propias construcciones a escala de estantes basándonos en proporciones?
2. Elaboramos un modelo para poder realizar una innovación a una necesidad que haya en nuestra comunidad o realidad
3. Realizamos un trabajo de campo donde puedas realizar la interpretación y la toma de datos sobre las necesidades y problemáticas que existen en nuestra realidad, para luego tener el porcentaje de las causas y efectos que estos conllevan.

UNIDAD 4

GEOMETRÍA PLANA APLICADA EN NUESTRA COMUNIDAD

1. PRÁCTICA

En una comunidad del Beni donde el Proyecto Sociocomunitario Productivo se trabajaba desde los huertos, el primer sábado de enero en el diagnóstico, se decidió que los huertos deberían responder a necesidades y armonizados con los contenidos; en ese entonces con la ayuda del profesor de matemática y consensuado entre todos decidieron hacer el huerto de $16m^2$ y según esta reunión no debería ser sólo visual sino que las figuras tendrían que tener esta superficie una mayoría realizó su huerto en forma de cuadrilátero de 4x4, otros de 2x8, pero en eso el estudiante comparó ambas fórmulas del área de un cuadrado con el área de un círculo $A_{\square} = A_{\bigcirc}$.

¿Cómo puede dar utilidad a la geometría para delimitar superficies según la necesidad?

¿Qué tan útil considera a la geometría para solucionar necesidades y problemáticas de la realidad en función de las potencialidades?

En nuestro diario vivir todos los días vemos algunas figuras geométricas. En la calle, en el trabajo, al hacer deporte y otras actividades que realiza en la vida diaria.

1. ¿Al hablar de geometría a qué nos estamos refiriendo?

   ....

2. Cuando compras un terreno, al preguntar el tamaño ¿crees que estamos aplicando lo que es geometría?

   ....

3. ¿Un constructor al construir una edificación será que aplica la geometría?

   ....

2. TEORÍA

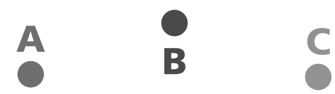
Geometría plana

La geometría plana estudia las figuras planas, que tienen únicamente dos dimensiones largo y ancho.

Para su mejor comprensión es muy necesario conocer algunos conceptos básicos; de punto, recta y plano.

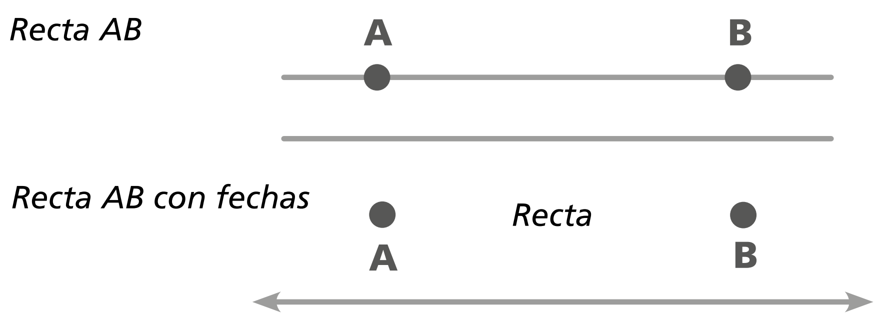
Punto

Es fundamental dentro de la geometría, no tiene dimensiones ni alto, largo, ni ancho, es la unidad más simple.



Recta

La recta es un conjunto infinito de puntos que se extienden en línea sobre una misma dirección, carece de ancho alto y grosor. Pero si tiene una longitud y lo podemos representar de la siguiente manera.



Plano

Es una superficie que tiene dos dimensiones ancho y largo.

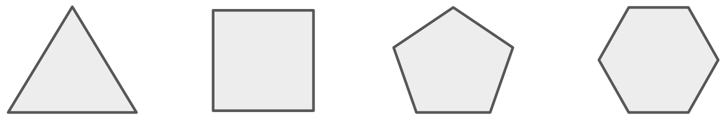
Polígonos

Es una figura plana cerrada formada por tres o más segmentos y se nombran de acuerdo al número de lados que tengan:

Triangulo de 3 lados.
Cuadrilátero de 4 lados.
Pentágono de 5 lados.
Hexágono de 6 lados.
Heptágono de 7 lados.

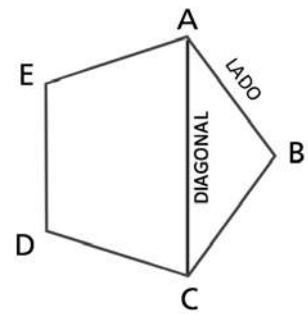
Octágono de 8 lados.
Nonágono de 9 lados.
Decágono de 10 lados.
Dodecágono de 12 lados.
n-ágono de n lados.

Ejemplo de polígonos



TRIÁNGULO CUADRADO PENTÁGONO HEXÁGONO

Las partes de un polígono son:



Vértice

Son los puntos finales de los segmentos que forman el polígono **A, B, C, D, E.**

Lados

Segmento que une dos vértices, por ejemplo **AB**.

Diagonal

Segmento de recta que une dos vértices no consecutivos, por ejemplo **AC**.

Perímetros y áreas de polígonos

Perímetro

Es la suma de la longitud de cada uno de los lados de una figura geométrica o polígono, las unidades para el perímetro, representan longitud o distancia y son singulares porque tienen una sola dimensión y sus unidades son: pulgadas, pies, millas, centímetros, metros y kilómetros.

P = L + L + L + L + ...

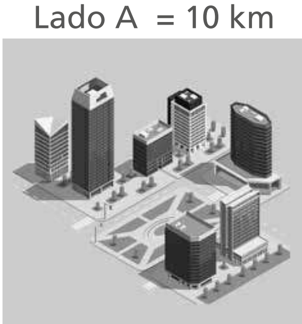
Fórmula que nos permitirá encontrar el perímetro de las figuras geométricas.

Ejemplos:

1. Hallar el perímetro del siguiente gráfico

Lado A = 10 km

Lado D = 10 km



Lado B = 10 km

Lado C = 10 km

P = L + L + L + L

P= A+B+C+D

P= 10km + 10km + 10km + 10km

P=40 km

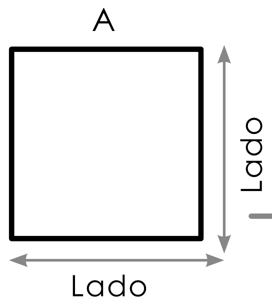
Para encontrar el perímetro **"P"** sumamos todos los lados **"L"** de dicha figura.

Áreas

Es una medida de superficie que se calcula usando las fórmulas correspondientes de acuerdo a la figura.

Ejemplo 1

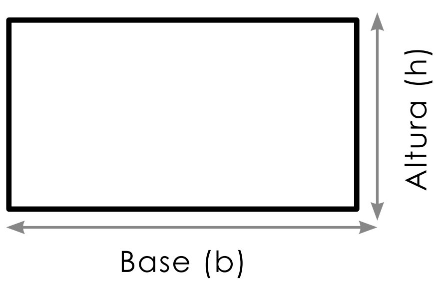
Cuadrado



Fórmula para calcular el área de un cuadrado.

$A = L^2$

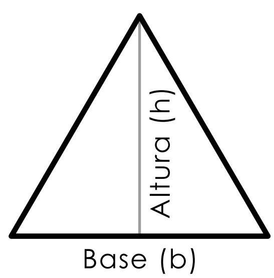
Rectángulo



Fórmula para calcular el área de un rectángulo.

$A = b \cdot h$

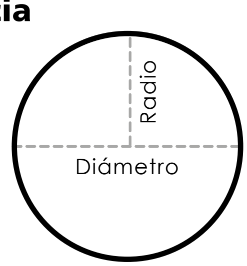
Triángulo



Fórmula para calcular el área de un triángulo.

$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

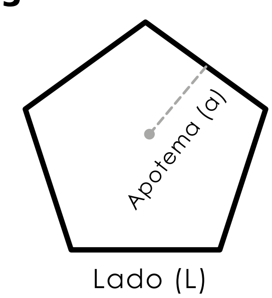
Circunferencia



Fórmula para calcular el área de un círculo.

$A = \pi \cdot r^2$

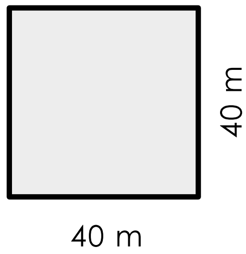
Polígono regular



Fórmula para calcular el área de un polígono.

$A = \dfrac{p \cdot a}{2}$ $\quad p = perímetro$

2. Juan desea saber cuánto tiene de área el terreno que quiere adquirir en la ciudad de Santa Cruz, sabiendo que el terreno es cuadrado y con las siguientes dimensiones.



Solución:

Reemplazando fórmula

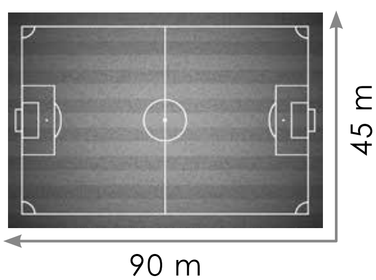
$$A = L^2$$

$$A = (40m)^2$$

$$A = (40m)(40m)$$

$$A = 1600m^2$$

3. Los participantes del CEA "LA CONCEPCIÓN” desean saber el área de la cancha de fútbol de césped sintético del municipio de Villa Serrano, sabiendo que tiene las siguientes dimensiones.



Solución:

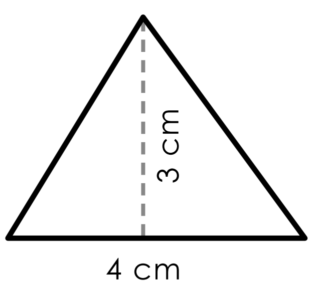
Reemplazando fórmula

$$A = b \cdot h$$

$$A = 90m \cdot 45m$$

$$A = 4050m^2$$

4. Hallar el área del triángulo con las siguientes dimensiones.



Solución:

Reemplazando fórmula

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{4cm \cdot 3cm}{2}$$

$$A = \frac{12cm^2}{2} = 6\ cm^2$$

Aplicamos lo aprendido

1. El señor Pedro necesita saber el perímetro de su terreno que compró en el municipio de Apolo del departamento de La Paz. Sabiendo que su terreno tiene una forma rectangular y con las siguientes dimensiones 12 metros de largo por 7metros de ancho.

R.-

2. Los participantes del CEA “8 DE SEPTIEMBRE” del departamento de Chuquisaca desean saber el área del círculo central de la cancha del Estadio Patria sabiendo que tiene un radio de 9,15 m.

R.-

3. VALORACIÓN

1. ¿Qué utilidad tiene el conocer la geometría para poder asociarlo con las necesidades locales?

R. ....

....

2. ¿Según tu percepción que tan útil es la geometría en la interpretación de la realidad para solucionar problemas que afecta a la realidad?

R. ....

....

4. PRODUCCIÓN

1. Realizamos una síntesis de la geometría con círculos y alturas para que construyamos tablas y procedimientos utilizando proporciones, ampliaciones y reducciones para realizar una investigación.

R. ....

....

2. Realizamos una investigación sobre los productos potenciales de tu región y en tu huerto siémbralos en función al porcentaje.

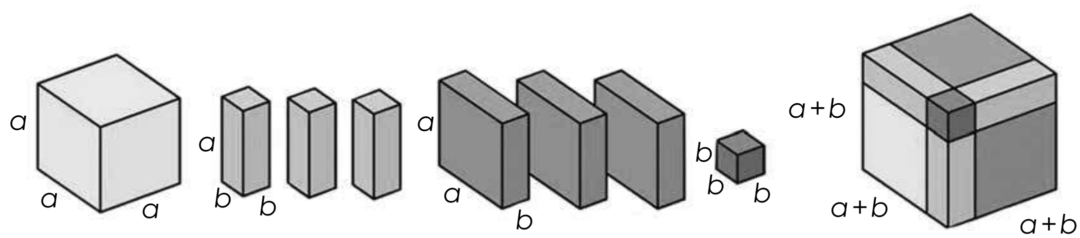
R. ....

....

MÓDULO II
ÁLGEBRA, OPERACIONES ALGEBRAICAS

OBJETIVO HOLÍSTICO

Fortalecemos los valores de responsabilidad y tolerancia, mediante el razonamiento lógico matemático, a través de la resolución de operaciones matemáticas, para contribuir en la vida social y económica de nuestros pueblos.



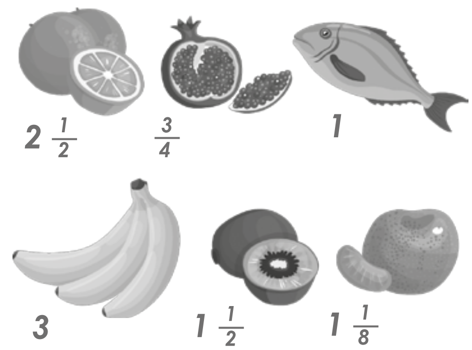
$$a^3 + 3ab^2 + 3ba^2 + b^3 = (a+b)^3$$

UNIDAD 5

EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN LA VIDA SOCIAL Y ECONÓMICA DE NUESTROS PUEBLOS

1. PRÁCTICA

Veremos como la singularidad determina el desarrollo del lenguaje algebraico dando sentido a la matemática con el siguiente ejemplo:



Juan decidió realizar las siguientes actividades:

1. Enumeró cuantos objetos hay, en este ejemplo vemos que hay 6 elementos, pero no están definidos o agrupados y menos representados.

2. Mencionar el objeto que este solo, como en esta imagen donde encontramos a una trucha, pues solo la mencionaremos como singular **trucha** .

3. Realizó la aclaración que cuando tenemos un objeto, a este no es necesario poner una cantidad porque al mencionarlo como algo singular no requiere de un número que lo acompañe.

4. Los objetos que están conformados por más de una cantidad, los acompañamos con la cantidad que estos conllevan, como vemos en la imagen son $2\frac{1}{2}$ **naranjas, 3 plátanos,** $1\frac{1}{8}$ **mandarinas,** $\frac{3}{4}$ **grana y** $1\frac{1}{2}$ **kiwi.**

5. Posteriormente representamos a cada objeto con la primera letra del objeto, por ejemplo: a la trucha solo lo representamos con **"t"**, como es singular no le ponemos 1, los plátanos los representamos con **3p**, a las naranjas con $2\frac{1}{2}n$, a las mandarinas con $1\frac{1}{2}m$, la grana con $\frac{3}{4}g$ y el kiwi con $1\frac{1}{2}k$.

6. De esta forma representó a los objetos con $t + 2\frac{1}{2}n + 3p + 1\frac{1}{8}m + \frac{3}{4}g + 1\frac{1}{2}k$, todos los objetos ordenados con variables y sus cantidades.

1. ¿Cómo podemos llevar en variable situaciones reales de nuestro diario vivir?

R. ....

2. ¿Qué es un cociente para usted?

R. ....

3. ¿Qué entiende usted por variable?

R. ....

2. TEORÍA

Expresiones algebraicas en la vida familiar y comunal

Una expresión algebraica; es el conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones matemáticas.

Ejemplo 1

EXPRESIÓN ALGEBRAICA	Nº DE TÉRMINOS	VARIABLES	CONSTANTES
$5xy$	1	x, y	5
$x^2 - 2x + y^2$	3	X, y	1,2
$\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}X$	2	x	$\sqrt{2}, \frac{1}{2}$

Ejemplo 2

Andrés Suárez un ganadero de Beni tiene los siguientes animales.

30 **cabezas de vacas holandesas**

"30" parte numeral.

"Cabezas de vacas holandesas" variable.

25 **cabezas de vacas criollas**

"25" parte numeral.

"Cabezas de vacas criollas" variable.

Clasificación de las expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican de acuerdo al número de términos que tengan, estas son: Monomios, binomios, trinomios y polinomios.

NOMBRE	N° DE TÉRMINO	EJEMPLOS
Monomio	1	$3x;\ \sqrt{2};\ \frac{1}{2}$
Binomio	2	$6x + 3y;\ x + 2;\ \frac{1}{2}x^2 - 0$
Trinomio	3	$x^2 + 2xy + y^2;\ 2x^2 - 3x + 10$
Polinomio	2 o más términos	$3x + 5,\ 8x^2 - 3x + 2,\ 7x^3 - 2x^2 - x + 5$

Polinomios

Grado de un polinomio

Para determinar el grado de un polinomio, primero debemos saber que el grado de un monomio o término es la suma de todos sus exponentes de los factores literales de dicho término.

Ejemplo:

$4x^2\ y^3\ z^4$ la suma de los exponentes $2 + 3 + 4 = 9$

El polinomio es de grado 9

Entonces el grado de un polinomio está indicado por el grado del término de mayor grado.

Indica el grado de cada polinomio.

1) $$\underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{6x^2y} + \underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{8x^3y^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{4xy}$$

R. El polinomio es de grado 5

Fijamos lo aprendido mediante la aplicación de las actividades, resolvemos los siguientes ejercicios.

Actividad

En base al ejemplo anterior determina el grado de los siguientes polinomios.

1) $7xy + 2x^7y$

2) $4x^8y + 6x^5\ y^2 + x^3\ y^4$

3) $4a^3\ b^4\ c^2 + 2a^2\ b^4$

4) $3mn + 6m^2\ n + mn^2$

Orden de un polinomio

Un polinomio esta ordenado en forma creciente o ascendente con respecto a una de sus variables, si el exponente de la letra es en cada termino mayor que la anterior.

Un polinomio esta ordenado en forma decreciente o descendente respecto a una de sus variables, si el exponente de la letra es en cada termino menor que la anterior.

Ejemplo 1

Ordenar los siguientes polinomios en forma creciente y decreciente.

1) $m^3 + 6m - m^2 + m^4 - 6$

$-8 + 6m - m^2 + m^3 + m^4$ ordenado en forma creciente.

$m^4 + m^3 - m^2 + 6m - 8$ ordenado en forma decreciente.

2) $a^2 b^4 + a^4 b^3 - a^6 b^2 + 6a^8 b + b^5$

$6a^8 b - a^6 b^2 + a^4 b^3 + a^2 b^4 + b^5$

RECUERDA:
Creciente = se ordena de menor a mayor tomando en cuenta el exponente.
Decreciente = se ordena de mayor a menor tomando en cuenta el exponente.

Actividades

1. Ordena en forma creciente con respecto a la letra "b".

   $+b^5 + a^2b^4 + a^4b^3 - a^6b^2 + 6a^8b$

2. Ordena en forma creciente los siguientes polinomios, con respecto a la letra "x".

   $-3x^{15} y^2 + 4x^{12}y^3 - 8x^6 y^5 - 10x^3 y^6 + y^7 - x^9 y^4 + 3x^{18}y$

3. Ordenar en forma decreciente con respecto a la letra "*a*".

   $3ab^2 c^3 + 14a^2bc^2 - 6b^3c - 18a^3$

4. Determinamos el grado de cada polinomio.

   a) $\frac{1}{2} xy - 2x^2y^3 + 7x^4y^5 - 9y^7$

   b) $x^5y^9z - 3x^3y^3z^4 + 2x^4y^2z^2 + 7x^2y^4z^7 - 9xy^5z^5$

   c) $\sqrt{2}x^3 - 6x^4 + 3x^8 - 14x$

   d) $8b - 2b^2c + 5b^3c^2$

5. Ordena en forma creciente y decreciente con respecto a "x"

A) $X^3Y - X^4 + X^5Y^2 - X^6Y^3 + 3XY^5$

B) $6X^2Y^3Z - 15X^9Y^4Z^6 + XY^{12}Z^2$

C) $4X^3Y - X^2Z^3 - 3XY^6Z^5$

D) $3X^7Y^5 - Y^4 - X^3 - 2X^6Y^{10} - 3X^9Y^3$

Operaciones con polinomios

Suma de polinomios

La suma o adición de polinomios es una operación que tiene por objeto reunir dos o más cantidades o expresiones algebraicas llamadas sumandos en una sola expresión.

Para sumar dos o más polinomios en la práctica se suele colocar los polinomios uno debajo del otro con su propio signo, ordenados de modo que los términos semejantes queden en la misma columna finalmente se hace la reducción de términos.

Ejemplos:

1. Sumar: $7x^2 + 2x,\ 4x - 1$

Así $\longrightarrow$

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 2x \\ + 4x - 1 \\ \hline 7x^2 + 6x - 1 \end{array}$$

colocando los términos uno debajo del otro

reduciendo términos semejantes

R. $\mathbf{7x^2 + 6x - 1}$

2. Sumar: $3a + 2b - c\ , 2a + 3b + c$

$$\begin{array}{r} 3a + 2b - \cancel{c} \\ 2a + 3b + \cancel{c} \\ \hline 5a + 5b \end{array}$$

R. $\mathbf{5a + 5b}$

Esteban desea vender en el mercado "Vicuña" del departamento de Potosí, para ello decide comparar de los productores del Valle Chuquisaqueño; de la población de Bañadito compra; 200 mandarinas, 250 naranjas y 35 papayas; posteriormente se traslada a la población del Oro compra, 150 mandarinas, 242 naranjas y 30 papayas.

¿Cuánta mercadería tiene para vender?

Mandarinas = m

Naranjas = n

Papayas =p

$\longrightarrow$

$$\begin{array}{c} 200m+250n+35p \\ 150m+242n+30p \\ \hline 350m+492n+65p \end{array}$$

Respuesta: Esteban tiene 350 mandarinas; 492 naranjas y 65 papayas para vender en el mercado "Vicuña".

Fijamos lo aprendido con las siguientes actividades

1. Sumar: $a^5 + a^6 + a^2, a^4 + a^3 + 6, 3a^2 + 5a - 8, - a^5 - 4a^2 - 5a + 6$

2. Sumar: $a^3 - 8ax^2 + x^3,\ 5a^2x - 6ax^2 - x^3,\ 3a^3 - 5a^2x - x^3,\ a^3 + 14ax^2 - x^3$

3. Sumar: $:\ x^2yz + xy^2z + 3xyz^2,\ 3yzx^2 - 4xzy^2 + z^2xy,\ - 4yx^2z + 4zxy^2 - 5yz^2x$

Polinomios con coeficientes fraccionarios

Por ejemplo, te presentamos en el siguiente ejercicio donde podrás observar los cálculos auxiliares, para poder resolver polinomios con coeficientes fraccionarios.

Ejemplo 1

6. Sumar: $a^2 + \frac{1}{2}ab,\ - \frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2,\ - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2$

$$\begin{array}{lll}
a^2 & + \frac{1}{2}ab & \\
 & - \frac{1}{4}ab & + \frac{1}{2}b^2, \\
 & - \frac{1}{4}ab & - \frac{1}{5}b^2 \\
\hline
a^2 & & + \frac{3}{10}b^2
\end{array}$$

Cálculos auxiliares

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2 - 1 - 1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5 - 2}{10} = \frac{3}{10}$$

Actividades

Sumamos los siguientes polinomios con coeficientes fraccionarios.

1) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{3},\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}$

2) $m^2 + 2m + 1;\ - \frac{1}{2}m2 + m - \frac{1}{3}$

Resta o sustracción de polinomios

Para restar expresiones algebraicas se escribe el minuendo con su propio signo, luego el sustraendo con signo cambiado y se reducen términos semejantes.

Ejemplo:

1. De $3x^4 + x^2 + 3x + 4$ restar $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x + 2$

$$\begin{array}{rrrrrl} 3x^4 & & +x^2 & +3x & +4 & \text{Minuendo con su propio signo.} \\ -x^4 & -3x^3 & +3x^2 & -x & -2 & \text{Sustraendo con signo cambiado.} \\ \hline 2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & +2x & -2 & \text{Reduciendo términos semejantes.} \end{array}$$

2. Restar $\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b + \frac{2}{3}c$ de $a + b - c$

$$\begin{array}{rrrr} & a & +\ b & -\ c \\ + & \frac{1}{2}a & +\ \frac{3}{4}b & +\ \frac{2}{3}c \\ \hline & \frac{1}{2}a & +\ \frac{7}{4}b & -\ \frac{5}{3}c \end{array}$$

Cálculos auxiliares

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$-1 - \frac{2}{3} = \frac{-3-2}{3} = -\frac{5}{3}$$

¿Andrés confeccionará un traje y un vestido para la festividad de "Gran Poder", cuanto material necesita?

Para el traje:

- 1/2 metro de lienzo
- 7/2 metros cuadrados de algodón

Para el vestido:

- 1/3 metros de lienzo
- 2/3 metros cuadrados de algodón

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}m + \frac{7}{2}m^2 \\ \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}m^2 \\ \hline \frac{5}{6}m + \frac{25}{6}m^2 \end{array}$$

Respuesta: Andrés necesitará 5/6 metros de lienzo; 25/6 metros de algodón.

Resolver en tu cuaderno:

Restar

1. Restar $m^6 + m^4n^2 - 9m^2n^4 + 19$ de $-13m^3n^3 + 16mn^5 - 30m^2n^4 - 61$

2. Restar $14mn^2 - 21m^2n + 5m^3 - 18$ de $5m^3 - 9n^3 + 6m^2n - 8mn^2$

3. Restar: $\frac{1}{2}a^2 - a + 3$ de $2a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$

4. Restar $11a^2b^3$ de $-7a^2b^3$

5. Restar $4m^2 + 6m - 7$ de $3m^2 + 6m + 10$

Sumar

1. $\frac{3}{4}a^2b;\ \frac{1}{2}ab^2;\ -\frac{1}{4}a^2b;\ \frac{1}{2}ab^2;\ a^2b;\ -\frac{5}{6}ab^2$

2. $5ab - 3bc + 4cd;\ 2bc + 2cd - 3d;\ 4bc - 2ab + 3d;\ -3bc - 6cd - ab$

3. $\frac{3}{7}a^2b - \frac{2}{5}ab^2;\ 3ab - \frac{5}{2}ab^2;\ -\frac{7}{3}ab + 3^2b$

4. $m^2 - n^3 + 6m^2n;\ -4m^2n + 5mn^2 + n^3;\ m^3 - n^3 + 6mn^2;\ -2m^3 - 2m^2n + n^3$

5. $x5 - y^5;\ \frac{1}{10}x^3y^2 - \frac{3}{4}xy^4 - \frac{1}{6}y^5;\ \frac{3}{5}x^4y - \frac{5}{6}x^2y^3 - \frac{1}{9}y^5;\ 2x^4y - \frac{2}{5}x^3y^2 - \frac{1}{3}y^5$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador tomando en cuenta la propiedad $\mathbf{a^n * a^m = a^{n+m}}$ en la parte literal, ley de signos finalmente se reducen los términos semejantes.

Recordemos algunas propiedades

$$a^n * a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n*m}$$

$$(a * b)^n = a^n b^n$$

propiedad distributiva del producto
Respecto a la suma.

$$a(x + y) = ax + ay$$

Ejemplos 1

Multiplicamos los siguientes monomios y polinomios.

> Recuerda que la multiplicación puede expresarse con los siguientes signos:
>
> ×
>
> *
>
> ·

1. $2a^2b$ por $-3ab^2c$

Solución: $(2a^2b)(-3ab^2c) = -6a^{2+1}b^{1+2}c$

$= -6a^3b^3c$

2. $(2a^2x) \cdot \left(\frac{1}{2}ax^2\right)(-5a^{-1}x^{-2})$

Solución: $= 2 * \frac{1}{2}(-5)a^{2+1-1}x^{1+2-2}$

$= -5a^2x$

3. $(-3m^2n^3)^4$

Solución: $= (-3m^2n^3)(-3m^2n^3)(-3m^2n^3)(-3m^2n^3)$

$= 81m^8n^{12}$

4. $(2a+5b) \cdot (4a-b)$

Solución: $= 8a^2 - 2ab + 20ab - 5b^2$

$= 8a^2 + 18ab - 5b^2$

Ejemplo 2

Multiplicamos los polinomios por el método normal.

$(3a^5 - 2a^4 + a^2 - 1) \cdot (2a^3 + a + 3)$

Solución:

Completamos el polinomio multiplicando con términos nulos

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & & & 3a^5 & -2a^4 & +0a^3 & +a^2 & +0a & -1 \\
\times & & & & & & 2a^3 & +a & +3 \\
\hline
6a^8 & -4a^7 & +0a^6 & +2a^5 & +0a^4 & -2a^3 & & & \\
 & & 3a^6 & -2a^5 & +0a^4 & +a^3 & +0a^2 & -a & \\
 & & & 9a^5 & -6a^4 & +0a^3 & +3a^2 & +0a & -3 \\
\hline
6a^8 & -4a^7 & +3a^6 & +9a^5 & -6a^4 & -a^3 & +3a^2 & -a & -3
\end{array}
$$

Respuesta → $6a^8 - 4a^7 + 3a^6 + 9a^5 - 6a^4 - a^3 + 3a^2 - a - 3$

Ejemplo 3

Multiplicamos: $(3m - 2)(2m + 5)(m - 1)$

Solución: Multiplicamos los dos segundos polinomios, luego el resultado obtenido multiplicamos con el primero.

$$
\begin{aligned}
&= (3m - 2)(2m + 5)(m - 1)\\
&= (3m - 2)(2m^2 - 2m + 5m - 5)\\
&= (3m - 2)(2m^2 + 3m - 5)\\
&= 6m^3 + 9m^2 - 15m - 4m^2 - 6m + 10\\
&= 6m^3 + 5m^2 - 21m + 10
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4

Simplificamos: $(a + 3)(a - 1) - (a - 1)(a - 4) + (a + 2)(a + 4) - (a + 1)(a - 2)$

Solución: $\underbrace{(a + 3)(a - 1)} - \underbrace{(a - 1)(a - 4)} + \underbrace{(a + 2)(a + 4)} - \underbrace{(a + 1)(a - 2)}$

Multiplicamos → $= (a^2 + 2a - 3) - (a^2 - 5a + 4) + (a^2 + 6a + 8) - (a^2 - a - 2)$

Eliminar paréntesis $= a^2 + 2a - 3 - a^2 + 5a - 4 + a^2 + 6a + 8 - a^2 + a + 2$

Respuesta → $= 14a + 3$

Fijamos lo aprendido con las actividades

1. Multiplicamos los siguientes monomios.

$2x^2 \cdot 5x =$

$4y^2 \cdot (-3y^3) =$

$(-6a^3b) \cdot (-a^2b^3) =$

$4x^2yz \cdot xy^2z \cdot \frac{1}{2}xy =$

$\frac{2}{5}a \cdot \frac{5}{4}a^3 =$

2. Multiplicamos el monomio por el polinomio.

$4x(3x^2 + 1) =$

$\frac{1}{2}ab(6a^2 - 8ab) =$

$2a^2(a^2 - 3a + 1) =$

$-2m(m^2 - 2m + 5) =$

3. Multiplicamos los polinomios por las propiedades distributivas.

$(2x + 1)(4x - 5) =$

$(4a - 2b)(a - 7b) = (4a + 2)(16a^2 - 8a + 4) =$

4. Multiplicamos los polinomios en forma normal.

$(3x - 4y)(5x + y)$

$(b^2 - b + 3)(2b + 1)$

$(4m^2 - 5m + 2)(2m + 2)$

5. Multiplicamos los siguientes polinomios y reducimos términos semejantes.

$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ $\qquad$ $(6m - 5n)(4n + 6m)$

División de monomios

División de dos monomios

Para dividir dos monomios, se dividen los coeficientes y la parte literal se aplica la ley de los exponentes.

Ley de los exponentes

Dividendo → a^n

Divisor → a^m

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \ \forall n > m$$

Cociente ↑ (a^{n-m})

Ley de signos

(+) ÷ (+) = +
(+) ÷ (-) = -
(-) ÷ (+) = -
(-) ÷ (-) = +

Ejemplo:

Dividimos los siguientes monomios.

1. $(8x^5) \div (-2x^2)$

Solución: $\dfrac{8x^5}{-2x^2} = -\dfrac{8}{2}x^{5-2} = -4x^3$

2. $(-8a^{2m-1}) \div (-4a^{m-2})$

Solución: $\dfrac{-8a^{2m-1}}{-4a^{m-2}} = \dfrac{8}{4}a^{(2m-1)-(m-2)}$

$= 2a^{2m-1-m+2} \quad = 2a^{m+1}$

División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo 1

Dividimos el polinomio entre el monomio.

Repartimos el divisor a cada uno de los términos del dividendo.

Dividimos: $(6x^3 - 15x^2 + 21x) \div (3x)$

Solución: $\dfrac{6x^3 - 15x^2 + 21x}{3x} = \dfrac{6x^3}{3x} - \dfrac{15x^2}{3x} + \dfrac{21x}{3x}$

$= 2x^2 - 5x + 7$

Ejemplo 2. Dividimos el polinomio entre el monomio.

Dividir $\left(\dfrac{1}{2}m^5 - \dfrac{3}{5}m^4 + 2m^3\right) \div \left(\dfrac{1}{5}m^2\right)$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}m^5 - \frac{3}{5}m^4 + 2m^3\right)}{\left(\frac{1}{5}m^2\right)} = \frac{\frac{1}{2}m^5}{\frac{1}{5}m^2} - \frac{\frac{3}{5}m^4}{\frac{1}{5}m^2} + \frac{2m^3}{\frac{1}{5}m^2}$$

$$= \frac{5}{2}m^3 - 3m^2 + 10m$$

División de dos polinomios

Para dividir dos polinomios se sugiere cumplir los siguientes pasos.

Primer paso: se ordena el dividendo y el divisor con relación a una misma letra y en el mismo orden, completando términos que falten en el dividendo solamente, en el divisor no se debe completar los términos que falten.

Segundo paso: se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente.

Tercer paso: este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo al producto obtenido, escribiendo cada termino debajo de su semejante. Si algún termino de este producto no tiene termino semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponde de acuerdo con la orden del dividendo y el divisor.

Cuarto paso: se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.

Quinto paso: este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.

Sexto paso: se repite desde el cuarto paso hasta terminar con todos los términos del polinomio dividendo.

Ejemplo: *Dividir* $2x - 8 + 3x^2$ *entre* $x + 2$

Ordena el dividendo y el divisor y anotamos así:

Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \cline{2-2} & \\ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 3x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \cline{2-2} & 3x \\ \end{array}$$

Multiplicamos el primer término del cociente por el divisor, al producto cambiamos de signo y anotamos debajo de su semejante.

Realizamos operaciones con el dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 - 6x & 3x \\ \cline{1-1} - 4x & \\ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 3x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 - 6x \downarrow & 3x \\ \cline{1-1} - 4x - 8 & \\ \end{array}$$

Bajamos el siguiente término del dividendo

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-3x^2 - 6x \quad\downarrow & 3x \\ \hline
- 4x - 8 &
\end{array}
$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y así sucesivamente hasta concluir la división.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 + 2x - 8 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-3x^2 - 6x \quad\downarrow & 3x - 4 \\ \hline
- 4x - 8 & \\
+ 4x + 8 & \\ \hline
(0) &
\end{array}
$$

Actividades

1) Dividimos los siguientes monomios

Dividir: $8a^3 \div 2a$

Dividir: $12x^2y^3 \div 4xy^3$

Dividir: $24m^5 \div 6m^2$

Dividir: $6x^5y^3 \div 6x^5y$

2) Dividimos el polinomio entre el monomio

Dividir: $(8a^5 - 4a^4 - 6a^2) \div (a)$

Dividir: $(12x^2 - 8x^3 + 16x^4) \div (4x)$

3) Dividimos los siguientes polinomios

Dividir $(6x^2 - xy - 2x^2) \div (2x + y)$

Dividir $(10x^2 - 13xy - 3y^2) \div (2x - 3y)$

Dividir $(a^5 + 12a^2 - 5a) \div (a^2 - 2a + 5)$

Dividir $(m^4 - m^2 - 2m - 1) \div (m^2 - m - 1)$

Dividir $(y^4 + 3y^3 - 3y^3 - 7y + 6) \div (y^2 + 5y + 6)$

4) Determina el grado de los siguientes monomios

$3a^2\, b^3c$

$5x3yzz - 5$

5) Determina el grado de los siguientes polinomios

$4x^2 - xy^2 + y^3$

$4a^3 - a^2b + ab^3 - b^5$

6) Sumar los siguientes polinomios

$3x^2 - 8x + 7;\ - 2x^2 + 5$

$3x^2 - 8x + 7;\ 5x - 3;\ x^2 + 4x - 4$

7) Multiplica el siguiente polinomio

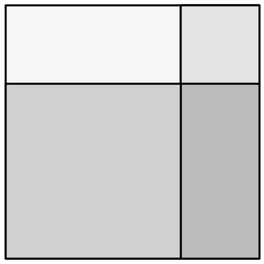
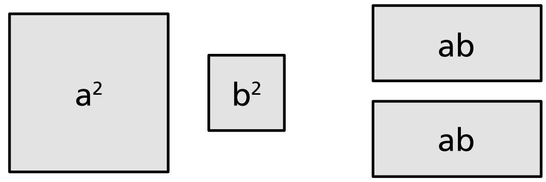
$(2m - 3n)\ 5m^{2-7mn} + 7n^2$

8) Divide el siguiente polinomio

$(x^4 - x^2 - 2x - 1) \div (x^2 - x - 1)$

Productos y cocientes notables

Cuando construimos ventanas aplicamos productos notables de la siguiente manera:

1. Describimos la imagen (áreas)

R. ....

Recuerda:

Se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y su resultado puede ser anotado por simple inspección, es decir sin necesidad de verificar la multiplicación.

Cuadrado de la suma de dos cantidades

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ $\qquad$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Entonces la regla general para multiplicar productos de potencia de la misma base es:

Regla general:
"El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado de la primera cantidad más el duplo del primer término por el segundo más el cuadrado de la segunda cantidad".

Ejemplos: especificar los términos

Desarrollar:

1) $(6a+b)^2 =$

- El cuadrado del primer término. $\quad (6a)^2 = 36a^2$
- El duplo del primer término por el segundo. $\quad 2(6a)(b) = 12ab$
- El cuadrado del segundo término. $\quad b^2 = b^2$

Entonces la solución es:

$$(6a + b)^2 = (6a)^2 + 2(6a)(b) + b^2 = 36a^2 + 12ab + b^2$$

2) $\left(\frac{7}{3}x^2y + 5z^3\right)^2$

- El cuadrado del primer término. $\left(\frac{7}{3}x^2y\right)^2 = \frac{49}{9}x^4y^2$
- El duplo del primer término por el segundo. $2\left(\frac{7}{3}x^2y\right)(5z^3) = \frac{70}{3}x^2yz^3$
- El cuadrado del segundo término. $(5z^3)^2 = 25z^6$

Entonces la respuesta es: $\left(\frac{7}{3}x^2y + 5z^3\right)^2 = \frac{49}{9}x^4y^2 + \frac{70}{3}x^2yz^3 + 25x^6$

Actividades

3) $(7a^2b^2 + 5x^4)^2 =$ **4)** $(a^m + a^n)^2 =$ **5)** $(\sqrt{x} + y)^2 =$

Cuadrado de la diferencia de dos términos

Es cuando multiplicamos dos términos con la diferencia del signo (-).

Multiplicamos:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Regla general:

"El cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el duplo del primer término por el segundo, más el cuadrado de la segunda cantidad".

Ejemplos:

1) $(4a - 3b)^2 = (4a)^2 - 2(4a)(3b) + (3b)^2 = 16a^2 - 24ab + 9b^2$

2) $(10ab - \frac{1}{3}b^3)^2 = (10ab)^2 - 2(10ab)\left(\frac{1}{3}b^3\right) + \left(\frac{1}{3}b^3\right)^2 = 100a^2b^2 - \frac{20}{3}ab^4 + \frac{1}{9}b^6$

Actividades

3) $(3xy - 5z)^2 =$ **4)** $\left(\frac{7}{5}xy^36xz^2\right)^2 =$ **5)** $(4a^3 - 3c^4)^2 =$

Cubo de la suma de dos términos

Cuando decimos cubo de la diferencia estamos multiplicando tres veces esos dos términos.

Así, por ejemplo:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

Regla:

"El cubo de la suma de dos cantidades es igual, al cubo del primer término más el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo, más el triple del primer término por el segundo al cuadrado más el cubo del segundo término".

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- Cubo del primer término. a^3
- Triple producto del primer término al cuadrado por el segundo. $3a^2b$
- Triple producto del primero por el segundo término al cuadrado $3ab^2$
- Cubo del segundo término. b^3

Ejemplo:

1) $(3x + 2y)^3 =$

- El cubo del primer término es: $(3x)^3 = 27x^3$
- Triple producto del primero al cuadrado por el segundo término: $3(3x)^2(2y) = 54x^2y$
- Triple producto del primero por el segundo término al cuadrado: $3(3x)(2y)^2 = 36xy^2$
- Cubo del segundo término: $(2y)^3=8y^3$

$$(3x + 2y)^3 = 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$$

Actividades

2) $(x^2 + 5y)^3 =$

3) $(7xz + 5z^2)^3 =$

4) $\left(\frac{1}{3}a + 2bc\right)^3 =$

5) $\left(3xy + \frac{3}{7}z\right)^3 =$

Cubo de la diferencia de dos términos

Al igual que en la suma observamos el resultado y por ende la regla fija, la encontramos multiplicando los términos tres veces.

$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$

$(a - b)^3 = a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Regla:

"El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual, al cubo del primer término menos el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo, más el triple del primer término por el segundo al cuadrado, menos el cubo del segundo término".

Ejemplo:

1) $(3x - 2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - 2y^3$

$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

Fijamos lo aprendido en las actividades

2) $(2x - 5y)^3$

3) $(5a - 2bc)^3$

4) $(7xz - 5z)^3$

5) $\left(3xy - \frac{2}{5}z\right)^3 =$

Producto de la suma por la diferencia

Es cuando la suma de dos términos por su diferencia.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Regla:
El producto de la suma por la diferencia de dos términos es igual, al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

Ejemplo:

1) $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2$

$= 9x^2 - 16y^2$

Actividades

2) $(8m + 7)(8m - 7) =$

3) $(4x + 9yz)(4x - 9yz) =$

4) $\left(\frac{3}{4}x + 6y\right)\left(\frac{3}{4} - 6y\right) =$

5) $\left(\frac{2}{5}a + \frac{4}{7}b\right)\left(\frac{5}{2}a - \frac{4}{7}b\right) =$

Cocientes notables

Se llama cocientes notables a ciertos cocientes que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito sin realizar alguna operación.

1. $$\frac{a^n - b^n}{a + b} = a - b$$

siempre que "n" sea par

Importante:
La diferencia de los <u>cuadrados</u> de dos cantidades dividida entre la suma de las cantidades es igual a la diferencia de las cantidades.

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

Ejemplo:

1) $1 - x^4$ entre $1 + x^2$ entonces $\frac{1 - x^4}{1 + x^2} = 1 - x^2$

Desarrollando:

$$\frac{1 - x^4}{1 + x^2} = \frac{1^2 - (x^2)^2}{1 + (x^2)} = 1 - x^2$$

2) *Dividir* $1-(a+n)^2$ *entre* $1+(a+n)$ *entonces* $\frac{1-(a+n)^2}{1+(a+n)} = 1-(a+n) = 1-a-n$

Actividades:

3) *Dividir* $x^2 - y^2$ *entre* $x + y$ *entonces* ....

4) *Dividir* $25 - 36x^4$ *entre* $5 + 6x^2$ *entonces* ....

5) *Dividir* $81a^6 - 100b^8$ *entre* $9a^3 + 10b^4$ *entonces* ....

2. $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a + b$ para cualquier "n"

Importante:
La diferencia de los <u>cuadrados</u> de dos cantidades dividida entre la diferencia de las cantidades, es igual a la suma de las cantidades.

$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$

Ejemplo:

1) *Dividir* $1 - (a + n)^2$ *entre* $1 - (a + n)$ *entonces* $\frac{1 - (a + n)^2}{1 - (a + n)} = 1 + a + n$

2) *Dividir* $9x^2 - y^2$ *entre* $3x - y$ *entonces* $\frac{9x^2 - y^2}{3x - y} = \frac{(3x)^2 - y^2}{3x - y} = 3x + y$

Actividades:

3) *Dividir* $25 - 36x^4$ *entre* $5 - 6x^2$ *entonces* ....

4) *Dividir* $36 - y^4$ *entre* $6 - y^2$ *entonces* ....

5) *Dividir* $81x^2 - y^2$ *entre* $9x - y$ *entonces* ....

Cociente de la suma o diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades

$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$

Importante:
La suma de los cubos de dos cantidades dividida entre la suma de las cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos:

1) *Dividir* $1 + 64a^3$ *entre* $1 + 4a$

Entonces $\frac{1 + 64a^3}{1 + 4a}$ *es igual a* $1 - 4a + 16a^2$

$$\frac{1 + (4a)^3}{1 + 4a} = 1^2 - 1 \cdot 4a + (4a)^2 = 1 - 4a + 16a^2$$

2) *Dividir* $8x^3 + y^3$ *entre* $2x + y$ *Entonces* $\frac{8x^3 + y^3}{2x + y}$ *es igual* $4x^2 - 2xy + y^2$

$$\frac{(2x)^3 + y^3}{2x + y} = (2x)^2 - (2x) \cdot (y) + y^2 = 4x^2 - 2xy + y^2$$

Actividades

3) *Dividir* $1 + a^3$ *entre* $1 + a$

4) *Dividir* $x^3 + y^3$ *entre* $x + y$

5) *Dividir* $27m^3 + 125n^3$ *entre* $3m + 5n$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = b^2 + ab + b^2$$

Importante

La diferencia de los cubos de dos cantidades dividida entre la diferencia de las cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos:

1) *Dividir* $1 - a^3$ *entre* $1 - a$ *Entonces* $\frac{1 - a^3}{1 - a} = 1 + a + a^2$

2) *Dividir* $8a^3 - 1$ *entre* $2a - 1$ *Entonces* $\frac{8a^3 - 1}{2a - 1} = 4a^2 + 2a + 1$

$$\frac{(2a)^3 - 1}{2a - 1} = (2a)^2 + 2a \cdot 1 + 1 = 4a^2 + 2a + 1$$

Actividades

3) $\frac{1 - a^3b^3}{1 - ab} =$

4) $\frac{216 - 125y^3}{6 - 5y} =$

Cociente de la suma o diferencia de potencias iguales de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades

1) La diferencia de potencias iguales. ya sea pares o impares de dos cantidades es siempre divisible por la diferencia de las bases.
2) La diferencia de potencias iguales pares de dos cantidades es siempre divisible por la suma de las bases.
3) La suma de potencias iguales impares de dos cantidades es siempre divisible por la suma de las bases.
4) La suma de potencias iguales pares de dos cantidades nunca es divisible por la suma, ni por la diferencia de las bases.

Podemos resumir en el siguiente cuadro de la siguiente manera:

- $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ siempre es divisible entre para n ya sea par o impar.
- $\frac{a^n - b^n}{a + b}$ siempre es divisible entre para n par.
- $\frac{a^n + b^n}{a + b}$ siempre es divisible entre para n impar.
- $\frac{a^n + b^n}{a - b}$ no es divisible para ningún "n".

Ejemplos:

1) $$\begin{cases} \dfrac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ \dfrac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \end{cases}$$

2) $$\left\{ \dfrac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \right.$$

3) $$\left\{ \dfrac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \right.$$

4) $$\dfrac{a^4 + b^4}{a + b} = \text{La división no es exacta o divisible}$$

5) $$\dfrac{a^5 - b^5}{a - b} = \underbrace{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}_{\text{5 términos}}$$

Leyes que nos permitan comprender mejor estos cocientes

Primero: El número de términos del cociente es igual al exponente de los términos en el dividendo.

Segundo: El primer término del cociente es el primer término del dividendo dividido entre el primer término del divisor, el exponente del primer término en el cociente disminuye uno en cada término posterior a este.

Tercero: El exponente del segundo término en el cociente es cero y aumenta uno en cada término posterior a este.

Ejemplo:

1) $$\dfrac{25x^2 - 16y^2}{5x + 4y} = 5x - 4y$$

2) $$\dfrac{32x^5 + y^5}{2x + y} = (2x)^4 - (2x)^3 * y + (2x)^2 * y^2 - 2x * y^3 + y^4$$

$$= 16x^4 - 8x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$$

3. VALORACIÓN

Reflexionamos sobre la aplicación y utilidad de los productos notables en nuestro contexto. Conversamos sobre la importancia de lo aprendido para el vivir bien y en armonía con la Madre Tierra.

4. PRODUCCIÓN

Realizamos con materiales de la región la construcción de superficies y volúmenes aplicando el conocimiento de productos notables.

UNIDAD 6
FACTORIZACIÓN

1. PRÁCTICA

Con la llegada de la Dosis de Esperanza que tiene la finalidad de combatir el COVID-19, que es un factor común de riesgo contra la salud.

¿En qué situación es necesario factorizar una problemática para salir adelante como sociedad?

....

¿Qué relación tiene la agrupación familiar si distribuimos un objeto a los integrantes? y ¿cómo lo factorizamos?

....

2. TEORÍA

Factorización

Es el proceso que consiste en transformar un polinomio como producto de dos o más factores. Así por ejemplo el polinomio 3a + 3b, tiene al 3 como factor común, entonces, por la propiedad distributiva se puede transformar así:

$$3a + 3b = 3(a + b)$$

Si desarrollamos producto algebraico en estos ejercicios tenemos:

a) $2x(x^2 - 3x + 2) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$

b) $(x + 7)(x + 5) = x^2 + 12x + 35$

Entonces vemos que las expresiones de la izquierda son los factores y las de la derecha son las expresiones a factorizar, es decir, la factorización es el proceso inverso de la multiplicación.

Existen diferentes métodos para factorizar expresiones algebraicas entre ellos tenemos:

Factor común

Para factorizar una expresión algebraica por el método del factor común, se busca el máximo común divisor de los coeficientes y la parte literal común con el menor exponente.

Ejemplos:

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1) $3x^2 - 7x$

- El factor común de la parte literal es "x" altera cada término se divide por x:

$$\frac{3x^2}{x} = 3x, \quad \frac{7x}{x} = 7$$

- Ahora aplicando la propiedad distributiva tenemos:

$$3x^2 - 7x = x(3x - 7)$$

2) $5y^2 - 10y^3 + 20y^4$

Se busca el máximo común divisor de los coeficientes

5	**10**	**15**	**5**
1	2	3	

Máximo común divisor

MCD 5,10,15 = 5

- La parte literal común y con menor exponente es y^2, el factor común es y^2.
- Ahora $\frac{5y^2}{5y^2} = 1, \quad \frac{10y^3}{5y^2} = 2y, \quad \frac{20y^4}{5y^2} = 4y^2$
- Ahora aplicando la propiedad distributiva la factorización queda finalmente:

$$5y^2 - 10y^3 + 20y^4 = 5y^2 (1 - 2y + 4y^2)$$

3) $60x^2 y - 30xy^2 + 15y^3$

- El factor común de la parte literal es y.
- Se calcula el máximo común divisor de los coeficientes.

60	**30**	**15**	**3**
20	10	5	5
4	2	1	

Máximo común divisor

MCD (60, 30, 15) = 3 ∗ 5 = 15

- El factor común es. $15y$
- Ahora $\frac{60x^2y}{15y} = 4x^2; \quad \frac{30xy^2}{15y} = 2xy; \quad \frac{15y^3}{15y} = y^2$
- Aplicando de nuevo la propiedad distributiva

$$60x^2y - 30xy^2 + 15y^3 = 15y\,(4x^2 - 2xy + y^2)$$

Fijamos lo aprendido con las actividades

4) $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4 n^3 + 48m^5n^4$

5) $a^{20} - a^{16} + a^{12} - a^8 + a^4 - a^2$

6) $\frac{4}{15}x^2 - \frac{6}{12}x^3 + \frac{2}{3}x^5$

7) $\frac{2}{5}h + \frac{4}{25}h^2 - \frac{2}{15}h^3$

Factor común con agrupación de términos

Es una aplicación del factor común, a expresiones de términos pares mayores que dos, de tal manera que los términos agrupados tengan algún factor común y las expresiones dentro del paréntesis sean iguales. En caso que esto no suceda la expresión no se puede factorizar por este método.

Procedimiento:

1) Se agrupan los términos que tengan algún factor en común, encerrado entre paréntesis y separado cada grupo por el signo del primer término del siguiente grupo. Si el signo que se le pone al segundo grupo es negativo, entonces se les cambian los signos a los términos de ese grupo.
2) Cada grupo se factoriza como el caso de "Factor Común".
3) Se forma una expresión con dos factores: uno con los términos comunes y otro con los no comunes.

Ejemplos:

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1) $ay + by + az + bz$

Los dos primeros términos tienen el factor común "y" y los dos últimos tienen como factor común "z", por lo consiguiente se pueden agrupar de la siguiente forma:

$$(ay + by) + (az + bz)$$
$$= y(a + b) + z(a + b)$$
$$= (a + b)(y + z)$$

2) $8x + 16xw - 12y - 24yw$

La expresión tiene 4 términos y se puede agrupar de dos en dos, teniendo en cuenta que el 2° y 4° término tienen como factor común $8w$ y el 1o y 3o término tiene como factor común 4; por lo tanto.

$8x + 16xw - 12y - 24yw$

$= 4(2x - 3y) + 8w(2x - 3y)$

$= (2x - 3y)(4 + 8w)$

$= 4(2x - 3y)(1 + 2w)$

3) $3x^3 - 9bx^2 - x + 3b$

> La expresión tiene un número par de términos y se pueden agrupar el 1o y el 3o término porque tienen el factor común "x" y el segundo y cuarto término porque tienen el factor común $3b$. Por lo tanto.

$3x^3 - 9bx^2 - x + 3b \longrightarrow (3x^3 - x) + (-9bx^2 + 3b)$

$= x(3x^2 - 1) + 3b(-3x^2 + 1)$

$= x(3x^2 - 1) - 3b(3x^2 - 1)$

$= (3x^2 - 1)(x - 3b)$

Resolvemos:

1) $a^2 + ab + ax + bx$

2) $am - bm + an - bn$

3) $ax - 2bx - 2ay + 4by$

4) $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$

5) $x + 2^2 - xy^2 - y^2$

Caso trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (aspa simple)

> La factorización por el método aspa simple, consiste en escribir los términos ax^2 y c; como producto de dos factores, tales que la suma algebraica de productos cruzados nos dé el segundo término.

$$\begin{array}{ccc} ax^2 & + bx + & c \\ \downarrow & & \downarrow \\ mx & & p \\ nx & & q \\ & npx & \\ & mqx & \\ \hline & (np + mq)x = bx & \end{array} \longrightarrow \boxed{ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)}$$

Ejemplos: Resolver por el método de aspa simple los siguientes trinomios.

Se debe obtener el producto del primer y tercer término.

1) $3x^2 + 7x - 20$

$$\begin{array}{lcl} 3x & & -5 = (3x - 5) \\ x & & +4 = (x + 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +12x \\ -5x \\ \hline +7x \end{array}$$

$\therefore 3x^2 + 7x - 20 = (3x - 5)(x + 4)$

Se debe obtener el producto del primer y tercer término.

2) $6x^2 - 5x - 6$

$$\begin{array}{lcl} 3x & & +2 = (3x + 2) \\ 2x & & -3 = (2x + 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9x \\ +4x \\ \hline -5x \end{array}$$

$\therefore 6x^2 - 5x - 6 = (3x + 2)(2x - 3)$

Se debe obtener el producto del primer y tercer término.

3) $10x^2 - 9xy - 7y^2$

$$\begin{array}{lcl} 5x & & -7y = (5x - 7y) \\ 2x & & +y = (2x + y) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -14xy \\ +5xy \\ \hline -9xy \end{array}$$

$\therefore 10x^2 - 9xy - 7y^2 = (5x - 7y)(2x + y)$

Se debe obtener el producto del primer y tercer término.

4) $30m^2 - 71m + 42$

$$\begin{array}{lcl} 5m & & -6 = (5m - 6) \\ 6m & & -7 = (6m - 7) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -35m \\ -36m \\ \hline -71ma \end{array}$$

$\therefore 30m^2 - 71m + 42 = (5m - 6)(6m - 7)$

Actividad

Factorizar los siguientes trinomios por el método de aspa simple.

a) $9x^2 + 42xy + 49y^2 =$

b) $16m^2 - 8m + 1 =$

c) $x^2 - 27x + 180 =$

d) $2x^2 + 5x - 12 =$

e) $12x^2 - 17x - 40 =$

Factorización de binomios especiales

Diferencia de cuadrados

Llamamos diferencia de cuadrados al binomio conformado por dos términos, a los que se les puede sacar raíz cuadrada exacta.

Donde siempre la diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Podemos utilizar esta relación para poder factorizar una diferencia de cuadrados.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Cuadrado perfecto

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Regla:

"Hallamos las raíces cuadradas de cada término.
Un factor es la suma y el otro factor es la diferencia de dichas raíces".

Ejemplos:

Factorizar

1) $m^2 - 81$ *extraemos la raíz cuadrada de ambos términos*

$\sqrt{(m)^2} = m$ y $\sqrt{81} = 9$

$m^2 - 81 = (m + 9)(m - 9)$

Fijamos lo aprendido con las actividades

Entonces anotamos así:

2) $(x + y)^2 - a^2 = [(x + y) - a][(x + y) + a] = (x + y - a)(x + y + a)$

3) $\frac{1}{16}x^2 - y^2 =$

4) $196x^2y^2 - z^{12} =$

5) $36(m + n)^2 - 121(m - n)^2 =$

Suma o diferencia de cubos

Si revisamos en cocientes notables podemos ver que:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2 \quad \text{y} \quad \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 - ab + b^2$$

Como en la división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tenemos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Regla:

"Una suma o diferencia de cubos se descompone en dos factores, el primer factor es la suma o diferencia de las raíces cúbicas y el segundo factor consta del cuadrado de la primera raíz, el producto de ambas raíces y el cuadrado de la segunda raíz".

Para la suma de cubos los signos del trinomio son alternados (+),(-),(+)…

Para la diferencia de cubos, los signos del trinomio son todos (+),(+),(+)…

Ejemplos:

Factorizar.

1) $8 + x^3$ *extraemos la raíz cuadrada de ambos términos*

$\sqrt[3]{8} = 2$ *y* $\sqrt[3]{x^3} = x$

Luego anotamos según la regla:

$$8 + x^3 = (2 + x)(2^2 - 2x + x^2) = (2 + x)(4 - 2x + x^2)$$

2) $27x^3 - 1000y^3 = (3x-10y)((3x)^2 + 3x * 10y + (10y)^2)$

$= (3x - 10y)(9x^2 + 30xy + 100y^2)$

Fijamos lo aprendido con las actividades

3) $64m^3 - 729 =$

4) $27m^6 + 343n^9 =$

5) $64(m + n)^3 - 125=$

La regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método que permite:

- Resolver ecuaciones de tercer grado o mayor (cuarto grado, quinto grado)
- Dividir un polinomio entre un binomio que sea de la forma x-a
- Factorizar polinomios de tercer grado o mayor (cuarto grado, quinto grado)
- Calcular las raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3.
- Regla de Ruffini para resolver ecuaciones y factorizar
- La Regla de Ruffini para Dividir entre Binomios de la forma x-a

Regla de Ruffini para resolver ecuaciones y factorizar

La regla de Ruffini se utiliza para resolver ecuaciones de tercer grado o mayor.

Para resolver ecuaciones de primer grado utilizamos un método, para las ecuaciones de segundo grado se utiliza otro método y para resolver las ecuaciones de tercer grado o mayor, o dicho de otra forma, para ecuaciones de grado superior a dos, se utiliza el método de Ruffini.

Con la regla de Ruffini, solamente se obtienen las soluciones enteras. Si la ecuación tiene soluciones complejas o reales, éste método no es válido.

Veremos que, para obtener las soluciones de la ecuación, previamente hay que factorizar, por lo que con el mismo ejemplo explicaremos ambos conceptos.

Vamos a resolver un ejemplo explicando paso por paso.

Tenemos la siguiente ecuación:

$$\boxed{x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0}$$

1.- Identificamos los coeficientes de cada término, que son los números que van delante de la incógnita.

$$\begin{array}{cccccccc} x^3 & + & 2x^2 & - & 1x & - & 2 & = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & & 2 & & -1 & & -2 & \end{array}$$

2.- Trazamos dos líneas perpendiculares de esta forma:

3.- Colocamos los coeficientes ordenados por su grado de mayor o menor:

Grado	→	**3**	**2**	**1**	**0**
Coeficientes del polinomio	→	**1**	**+2**	**-1**	**-2**

En la regla de Ruffini, el grado va disminuyendo de 1 en 1 y cada grado tiene su lugar. Por ejemplo, si no tuviéramos ningún término que tenga x^2, en el lugar del grado 2, se colocaría un 0.

Los números que hemos escrito hasta ahora en el método de Ruffini, es equivalente a escribir la ecuación, es decir:

$$1 + 2 - 1 - 2 \longleftrightarrow 1x^3 + 2x^2 - 1x - 2 = 0$$

Ahora escribimos un número a la izquierda de la línea vertical. Más adelante explicaremos qué número colocar aquí y por qué. De momento, empezamos con el 1.

Ese número corresponde al número (a) del binomio x – a

$$\text{Número del binomio x-a} \longrightarrow \begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{+2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

En este caso, escribir ahí un 1, significa el binomio (x – 1) en el método de Ruffini.

$$1 \longleftrightarrow x - 1$$

4.- Empezamos a ejecutar el método. El primer espacio de la segunda fila, siempre se deja libre.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{+2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \boxed{} & & & \\ \hline & & & & \end{array} \longleftarrow \text{Este espacio siempre se deja libre.}$$

5.- Se hace la suma de la **primera columna** y el resultado se pone abajo:

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{+2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & & & & \\ \hline & \mathbf{1} & & & \end{array} \longleftarrow \text{Se realiza esta suma.}$$

6.- Se multiplica el número de la izquierda por el resultado de la suma de la primera columna. El resultado se coloca en el hueco de la **segunda columna**:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**		
	1			

Se multiplican esos dos números y se coloca el resultado en la segunda columna.

7.- Se realiza la suma de la **segunda columna**:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**		
	1	**3**		

Se realiza esta suma.

8.- Se multiplica el número de la izquierda por el resultado de la suma de la segunda columna. El resultado se coloca en el hueco de la **tercera columna**:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	
	1	**3**		

Se multiplican esos dos números y se coloca el resultado en la tercera columna.

9.- Así sucesivamente hasta completar todas las columnas:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**

El objetivo es que **en la última columna tengamos** un 0. Esta es la explicación de **qué número colocar a la izquierda** de la línea:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**

Buscamos tener un "0".

Primera raíz: (x - 1)

Si no tenemos un cero, tendríamos que **probar con otro número** a la izquierda de la línea vertical y **reiniciar el proceso.**

Una vez hemos obtenido un cero al final, vamos a ver **qué significa** lo que tenemos hasta aquí:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**
	x^2	x^1	x^0	

Grado

Lo que nos ha quedado en la última fila es otra ecuación, pero ahora, el número que está a la izquierda del 0, tiene grado 0 y éste va aumentando de 1 en 1 hacia la izquierda. En este caso, nos queda lo **equivalente** a tener esta ecuación:

$$x^2 \quad +3x \quad +2$$

Y como hemos visto antes, el 1 a la izquierda de la línea vertical significaba:

$$(x\ -1)$$

Lo que quiere decir que lo que tenemos hasta ahora es el **producto de esas dos ecuaciones**, que es igual a la ecuación original:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 =$$

$$= (x^2 + 3x + 2)(x - 1)$$

10.- Con la fila que nos ha quedado, volvemos a empezar. Empezamos probando con el 1:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**
1				

1ra. Raíz : (x-1)

11.- Igual que antes, vamos multiplicando con el resultado de sumar en cada columna:

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**
1		**1**	**4**	
	1	**4**	$\boxed{\mathbf{6}}$	

Es diferente de cero "0"

Al final tenemos un 6, y lo que queremos es tener un cero. Por tanto, **debemos seguir probando**, con -1, con 2, con -2… hasta encontrar el número que nos haga tener un cero en la última columna.

	1	**+2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**
-1		**-1**	**-2**	
	1	**2**	**0**	

Si no obtenemos un 0, hay que seguir probando con otro número.

El número que nos hace obtener un 0 al final es el -1:

	1	**2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**
-1		**-1**	**-2**	
	(1	**2)**	**0**	

2^{da} raíz: (x + 1)

¿Y ahora qué hacemos? ¿Cómo sabemos que hemos terminado?

El mayor grado de la última fila es 1, por tanto, hemos terminado:

	1	**2**	**-1**	**-2**
1		**1**	**3**	**2**
	1	**3**	**2**	**0**
-1		**-1**	**-2**	
	(1	**2)**	**0**	

3^{ra} raíz: (x + 2)

El resultado de la factorización de la ecuación por el método de Ruffini es el producto de la última fila y de los números que están a la izquierda de la línea vertical, pero expresados en forma de ecuación:

$$\mathbf{(x - 1)}$$

$$\mathbf{(x + 1)}$$

$$\mathbf{(x + 2)}$$

Por tanto, nuestra ecuación será:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 =$$

$$=(x + 1)(x + 2)(x - 1)$$

Hasta aquí hemos factorizado la ecuación. Ahora vamos a resolverla:

1. Igualamos a 0, tal y como estaba en un principio.

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 =$$
$$= (x + 1)(x + 2)(x - 1) = 0$$

2. Recuerda que cuando una multiplicación de dos o más factores tiene como resultado 0, quiere decir que uno de los factores es 0, ya que cualquier valor multiplicado por 0 es 0. Por tanto, cualquier factor podría ser 0.

   Nos quedan tres ecuaciones de primer grado para despejar, de donde obtenemos las tres soluciones (ya que es una ecuación de tercer grado):

Soluciones: -1, -2 y 1

$$(x+1) = 0 \longrightarrow \mathbf{x_1 = 1}$$
$$(x+2) = 0 \longrightarrow \mathbf{x_2 = -1}$$
$$(x-1) = 0 \longrightarrow \mathbf{x_3 = -2}$$

La Regla de Ruffini para dividir entre binomios de la forma x - a

En este caso, la regla de Ruffini sirve para realizar una división de polinomios, donde el divisor es un binomio de la forma $(x-a)$.

Por ejemplo, nos piden realizar la siguiente división:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x - 2} =$$

Como el divisor es $(x-2)$, es decir, es de la forma $(x-a)$, utilizamos la regla de Ruffini. Solo debemos aplicar la regla una sola vez.

Esta vez, el número que tenemos que colocar a la izquierda de la línea vertical es 2 la "a" de $(x-a)$ y no tenemos que preocuparnos de si tenemos un cero en la columna final o no. El resultado que nos dé, será el resto de la división:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & \mathbf{1} & \mathbf{+2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\
\mathbf{2} & & \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{14} \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{12} \\
\text{Grado} \longrightarrow & \mathbf{x^2} & \mathbf{x^1} & \mathbf{x^0} & \text{resto}
\end{array}$$

El cociente de la división será el polinomio formado por los coeficientes de la última fila:

$$C(x) = x^2 + 4x + 7$$

Y el resto será el último elemento de la última fila:

$$R(x) = 12$$

3. VALORACIÓN

1. ¿Cómo reconocemos los objetos comunes que pueden ser seleccionados para priorizar una problemática o necesidad?

R. ....

....

2. ¿Es importante optar por la factorización en situaciones reales del contexto?, menciona ejemplos.

R. ....

....

4. PRODUCCIÓN

1. Elaboremos un FODA o lectura de realidad analizando las problemáticas por familia para determinar los factores comunes que deben ser priorizados en atender.

R. ....

....

2. Consideramos estas variables como un eje para poder trabajar el Proyecto Sociocomunitario Productivo.

R. ....

....

UNIDAD 8
FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. PRÁCTICA

En equipos comunitarios o en familia, realizamos una simulación donde cada uno de los mismos represente a un sector siempre y cuando sea el integrante de mayor edad.

¿Qué similitud tiene el **mcm** con elegir al comunario de mayor edad?

………..

¿Cómo podemos utilizar los números primos para facilitar operaciones con fracciones algebraicas?

………..

2. TEORÍA

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es una expresión fraccionaria en la que numerador y denominador son polinomios.

Ejemplos:

$$\frac{21mn^2x^6}{28m^4n^2x^2} \; ; \; \frac{a^2}{ab} \; ; \; \frac{x^2-5x+6}{2x-6}$$

$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ — $P_{(x)} \longrightarrow$ *Numerador*; $Q_{(x)} \longrightarrow$ *Denominador*

Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar una fracción algebraica, es reducirla a otra equivalente más simple cuyos términos ya no admiten simplificación, es decir son expresiones primas.

Tomando en cuenta el siguiente teorema. $\frac{a \cdot \cancel{k}}{b \cdot \cancel{k}} \; ; \; \frac{a}{b}$

Para simplificar fracciones algebraicas sugerimos los siguientes pasos:

1. *Se factoriza el numerador y denominador.*
2. *Se eliminan los factores comunes.*

Ejemplo:

Simplificamos las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{6a^2bc^3}{8ab^2c^3} =$ **Solución** $\dfrac{6a^2bc^3}{8ab^2c^3} = \dfrac{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{a}\cdot a\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{c}\cdot \cancel{c}}{\underbrace{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2}_{\text{Simplificamos los factores comunes.}}\cdot \cancel{a}\cdot b\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{c}\cdot \cancel{c}} = \dfrac{3a}{4b}$

2) $\dfrac{(a+b)^2\,(a-b)}{(a-b)^2(a+b)} =$ **Solución** $\dfrac{(a+b)^2\,(a-b)}{(a-b)^2(a+b)} = \dfrac{(a+b)\,\cancel{(a+b)}\,\cancel{(a-b)}}{\underbrace{(a-b)\,\cancel{(a-b)}}_{\text{Simplificamos los factores comunes.}}\,\cancel{(a+b)}} = \dfrac{(a+b)}{(a-b)}$

Cambiamos el signo de (2-y) = -(y-2)

(-) ÷ (-) = +

3) $\dfrac{(2-y)}{(y-2)(y-1)} =$ **Solución** $\dfrac{(2-y)}{(y-2)(y-1)} = \dfrac{-(y-2)}{(y-2)(y-1)} = \dfrac{-1}{(y-1)} = \dfrac{-1}{-(1-y)} = \dfrac{1}{1-y}$

4) $\dfrac{3m-15}{m^2-25} =$ **Solución** $\dfrac{3m-15}{m^2-25} = \dfrac{\overbrace{3\cancel{(m-5)}}^{\text{Factorizamos factor común.}}}{\underbrace{\cancel{(m-5)}(m+5)}_{\text{Factorizamos diferencia de cuadrados.}}} = \dfrac{3}{m+5}$

5) $\dfrac{21b-6ab}{6a^2-19a-7} =$ **Solución** $\dfrac{21b-6ab}{6a^2-19a-7} = \dfrac{\overbrace{3b(7-2a)}^{\text{Factorizamos factor común.}}}{\underbrace{(2a-7)(3a+1)}_{\text{Factorizamos aspas simple.}}} = -\dfrac{3b\cancel{(2a-7)}}{\cancel{(2a-7)}(3a+1)}$

$= -\dfrac{3b}{3a+1}$

6) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2} =$ **Solución** $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2} = \dfrac{\overbrace{\cancel{(a+b-c)}(a-b+c)}^{\text{Factorizamos diferencia de cuadrado}}}{\underbrace{(a+b+c)\cancel{(a+b-c)}}_{\text{Factorizamos diferencia de cuadrado}}} = \dfrac{a-b+c}{a+b+c}$

1.- Simplificamos las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{15x^2}{15xy} =$ **b)** $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} =$

c) $\dfrac{2x + 6}{x^2 + 3x} =$ **d)** $\dfrac{2a^2 - 9a - 5}{2a^2 - a - 1} =$

Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Para encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas sugerimos lo siguiente:

1. Factorizar cada expresión.
2. Escoger los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos:

1) $12x^2y^3$; $45x^4y^2z$

Solución

$$\left.\begin{aligned} 12x^2y^3 &= 2^2 \cdot 3\, x^2y^3 \\ 45x^4y^2z &= 3^2 \cdot 5\, x^4y^2z \end{aligned}\right\} \textbf{m.c.m.} = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5x^4\, y^3\, z$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2) $6x + 6$; $18x + 18$; $12x^2 + 24x + 12$

Solución

$$\left.\begin{aligned} 6x - 6 &= 2 \cdot 3(x - 1) \\ 18x + 18 &= 2 \cdot 3^2(x + 1) \\ 12x^2 + 24x + 12 &= 2^2 \cdot 3(x + 1)^2 \end{aligned}\right\} 2^2 \cdot 3^2(x + 1)^2$$

$$\longrightarrow \textbf{m.c.m.} = 12\,(x^2 + 2x + 1)$$
$$= 12\,(x + 1)^2$$

Fijamos lo aprendido con las actividades

Determinamos el mínimo común múltiplo.

1) $24x^2yp$; $18xy^3z$ **2)** $30a^3b^2c$; $42a^2b^5$

3) $6x - 6$; $18x - 18$; $12x^224x + 12$ **4)** $3a^2 - 9a^2$; $x^2 - 6x + 9$

5) $6x^2 + xy - 2y^2$; $15x2 + 22xy + 8y^2$; $10x^2 + 3xy - 7y^2$

Operaciones con fracciones algebraicas

Adición y sustracción de fracciones algebraicas con el mismo denominador

$$\frac{2x}{x^2}\ ;\ \frac{4}{x^2}\ ;\ \frac{12y^2}{x^2} \longrightarrow \boxed{\text{Mismo denominador}}$$

- Sumemos algebraicamente los numeradores, manteniendo el denominador.
- Simplificamos si es posible.

Ejemplo:

1) $$\frac{4x}{10} + \frac{5x}{10} - \frac{7x}{10} =$$

Solución $$\frac{4x}{10} + \frac{5x}{10} - \frac{7x}{10} = \frac{4x + 5x + -7x}{10} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{10}} = \frac{x}{10}$$

2) $$\frac{2m + 5}{7m - 1} + \frac{5m - 6}{7m - 1} =$$

Solución $$\frac{2m + 5}{7m - 1} + \frac{5m - 6}{7m - 1} = \frac{2m + 5 + 5m - 6}{7m - 1} = \frac{7m - 1}{7m - 1} = 1$$

3) $$\frac{5a - 11}{9 - 3a} - \frac{3a - 5}{9 - 3a} =$$

Solución $$\frac{5a-11}{9-3a} - \frac{3a-5}{9-3a} = \frac{(5a-11)-(3a-5)}{9-3a} = \frac{5a-11-3a+5}{9-3a} = \frac{2a-6}{9-3a} = \frac{2(a-3)}{9-3a}$$

$$= \frac{2(a-3)}{9-3a} = -\frac{2\ \cancel{(a-3)}}{3\ \cancel{(a-3)}} = -\frac{2}{3}$$

Fijamos lo aprendido con las actividades

a) $$\frac{5x}{x-1} + \frac{2x}{x-1} - \frac{6x}{x-1} =$$

b) $$\frac{4p^2}{2p+3} - \frac{4p+15}{2p+3} =$$

c) $$\frac{x^2 + 2x}{x+5} + \frac{15}{x+5} =$$

d) $$\frac{3x^2}{3x+4} + \frac{11x+20}{3x+4} =$$

e) $$\frac{x^2 + x - 1}{x^2+x+1} + \frac{x^2 - x - 1}{x^2+x+1} =$$

Adición y sustracción de fracciones algebraicas con distinto denominador

Para sumar o restar debemos tomar en cuenta los siguientes pasos:

- Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Escribimos el m.c.m. obtenido como común denominador.
- Dividimos entre cada denominador y multiplicamos con el numerador
- Realizamos las operaciones indicadas
- Simplificamos si es posible

Ejemplos:

1) $\dfrac{x-1}{x^2y} - \dfrac{y-2}{xy^2} =$

Solución $\dfrac{x-1}{x^2y} - \dfrac{y-2}{xy^2} = \dfrac{y(x-1) - x(y-2)}{x^2y^2} = \dfrac{\cancel{xy} - y - \cancel{xy} + 2x}{x^2y^2}$

$= \dfrac{2x - y}{x^2y^2}$

El m.c.m. se toma en cuenta a comunes y no comunes con su mayor exponente.

2) $\dfrac{2}{a-3} + \dfrac{3}{a+2} - \dfrac{4a-7}{a^2 - a - 6} =$

Solución $\dfrac{2}{a-3} + \dfrac{3}{a+2} - \dfrac{4a-7}{\underbrace{a^2 - a - 6}} = \dfrac{2}{a-3} + \dfrac{3}{a+2} - \dfrac{4a-7}{(a-3)(a+2)}$

Factorizamos aspas simple.

$= \dfrac{2(a+2)+3(a-3)-(4a-7)}{(a-3)(a+2)}$

Reducimos términos semejantes.

$= \dfrac{2a + 4 + 3a - 9 - 4a + 7}{(a-3)(a+2)}$

$= \dfrac{\cancel{(a+2)}}{(a-3)\cancel{(a+2)}} = \dfrac{1}{(a-3)}$

3) $\dfrac{5}{x^3 - 4x - 5} - \dfrac{3}{x^2 - 1} =$

Solución $\dfrac{5}{x^2 - 4x - 5} - \dfrac{3}{x^2 - 1} = \dfrac{5}{(x-5)(x+1)} - \dfrac{3}{(x+1)(x-1)}$

Factorizamos factor común.

Recuerda factorizar, para obtener el m.c.m.

$\dfrac{5(x-1) - 3(x-5)}{(x-5)(x+1)(x-1)} = \dfrac{5x - 5 - 3x + 15}{(x-5)(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x - 10}{(x-5)(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{2(x-5)}{(x-5)(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

Fijamos lo aprendido con las actividades:

1) $\dfrac{x-3}{4} + \dfrac{2x+5}{3} =$

2) $\dfrac{m^2-n^2}{m^3n^2} + \dfrac{mn+m^2}{m^2n^2} + \dfrac{1}{mn} =$

3) $\dfrac{4}{a+3} + \dfrac{24}{a^2-9} + \dfrac{3}{3-4} =$

4) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} =$

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción cuyo numerador y denominador son respectivamente, el producto de los numeradores y el producto de los denominadores, es decir:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Se recomienda seguir los siguientes pasos:

- Factorizar tanto el numerador y denominador.
- Multiplicar numerador con numerador y denominador con denominador.
- Simplificar si es posible.

Ejemplos:

1) $\dfrac{2m^2}{n^3} \cdot \dfrac{3n^2}{8m^3} =$

Recuerda:
Los exponentes se restan

Multiplicamos

Solución

$$\dfrac{2m^2}{n^3} \cdot \dfrac{3n^2}{8m^3} = \dfrac{2m^2 3n^2}{n^3 \cdot 8m^3} = \dfrac{6m^2n^2}{8m^3n^3} = \boxed{\dfrac{3}{4mn}}$$

Multiplicamos Simplificamos

2) $\dfrac{a^2-25}{3a-12} \cdot \dfrac{a^2-8a+16}{a^2-7a+10} =$

Solución

$$\underbrace{\dfrac{a^2-25}{3a-12} \cdot \dfrac{a^2-8a+16}{a^2-7a+10}}_{\text{Factorizamos}} = \dfrac{\cancel{(a-5)}(a+5)}{3\cancel{(a-4)}} \cdot \dfrac{(a-4)\cancel{(a-4)}}{\cancel{(a-5)}(a-2)}$$

$$= \dfrac{(a+5)(a-4)}{3(a-2)} = \boxed{\dfrac{a^2+a-20}{3a-6}}$$

Fijamos lo aprendido con las actividades:

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{2b^2c}{a^3c} =$

2) $\frac{5m}{6n} \cdot \frac{3n^2}{m^2} =$

3) $\frac{2x2 + 2}{y - 2} \cdot \frac{3y - 2}{4x + 4} =$

4) $\frac{5x - 5}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 + x - 6}{3x - 6} =$

División de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones puede obtenerse convirtiendo la operación de división en la operación producto. Es decir:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Se recomienda los siguientes pasos:

- Factorizar el dividendo y el divisor.
- Multiplicar la fracción dividendo por el divisor.
- Simplificar si es posible.

Ejemplos:

a) $\frac{5x^2y^2}{4} \div \frac{15xy^3}{12} =$

La división se convierte en multiplicación.

Solución

$$\frac{5x^2y^2}{4} \div \frac{15xy^3}{12} = \frac{5x^2y^2}{4} \cdot \frac{12}{15xy^3} = \frac{\cancel{5}x^2y^2 \cdot \cancel{12}}{\cancel{4} \cdot \cancel{15}xy^3} = \frac{x^2y^2}{xy^3} = \boxed{\frac{x}{y}}$$

El divisor cambia de numerador por denominador.

b) $\frac{m^2 - m - 2}{3m + 3} \div \frac{m^2 - 3m + 2}{4m - 4} =$

Solución

$$\frac{m^2 - m - 2}{3m + 3} \div \frac{m^2 - 3m + 2}{4m - 4} = \frac{(m - 2)(m + 1)}{3(m+1)} \div \frac{(m - 2)(m - 1)}{4(m-1)}$$

Factorizamos

El divisor cambia de numerador por denominador.

$$= \frac{\cancel{(m - 2)}\cancel{(m + 1)}}{3\cancel{(m + 1)}} \cdot \frac{4\cancel{(m - 1)}}{\cancel{(m -2)}\cancel{(m -1)}} = \frac{4}{3}$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}}$$

Fijamos lo aprendido con las actividades:

1) $\dfrac{m^2}{n^3} \div \dfrac{n^3}{m^2} =$

2) $\dfrac{7}{6m^2n^2} \div \dfrac{21}{18mn^3} =$

3) $\dfrac{x^2 + 9x + 20}{3x + 15} \div \dfrac{x^2 - 16}{3x - 12} =$

4) $\dfrac{6a^2 - 19a - 7}{6a - 21} \div \dfrac{6a + 2}{6} =$

Fracciones complejas

> Una fracción algebraica es compleja; si el numerador o el denominador o ambos son fracciones.

Ejemplos:

1)

$$\frac{\dfrac{2}{x+y}}{\dfrac{4}{x^2 - y^2}} =$$

Solución

$$\frac{\dfrac{2}{x+y}}{\dfrac{4}{x^2 - y^2}} = \underbrace{\frac{\dfrac{2}{x+y}}{\dfrac{4}{(x-y)(x+y)}}}_{\text{Multiplicamos extremos con extremos y medio con medios}} \overbrace{\frac{2(x-y)\cancel{(x+y)}}{\cancel{4}\cancel{(x+y)}}}^{\text{Simplificamos}} = \frac{(x-y)}{2}$$

2)

$$\frac{1+\dfrac{1}{m-1}}{1+\dfrac{1}{m^2-1}} =$$

Solución

Realizamos la suma de fracciones en el numerador y denominador.

$$\frac{1+\dfrac{1}{m-1}}{1+\dfrac{1}{m^2-1}} = \frac{\dfrac{m-\cancel{1}+\cancel{1}}{m-1}}{\dfrac{m^2-\cancel{1}+\cancel{1}}{m^2-1}} = \frac{\dfrac{m}{m-1}}{\dfrac{m^2}{m^2-1}}$$

Multiplicamos extremos con extremos y medio con medios

$$= \frac{m(m^2-1)}{m^2\,(m-1)} = \frac{\cancel{m}(m+1)\cancel{(m-1)}}{m^2\,\cancel{(m-1)}}$$

$$= \frac{m+1}{m}$$

3) $$\frac{\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y}}{\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x-y}}=$$

Simplificamos

Solución

Realizamos la suma de fracciones en numerador y denominador.

$$\frac{\frac{y}{x+y}-\frac{x}{x-y}}{\frac{-y}{x+y}+\frac{x}{x-y}}=\frac{\frac{y(x-y)-x(x+y)}{\cancel{(x+y)(x-y)}}}{\frac{-y(x-y)+x(x+y)}{\cancel{(x+y)(x-y)}}}=\frac{y(x-y)-x(x+y)}{-y(x-y)+x(x+y)}$$

$$=\frac{\cancel{xy}-y^2-x^2-\cancel{xy}}{\cancel{-xy}+y^2+x^2+\cancel{xy}}=\frac{\cancel{-(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}=-1$$

Fijamos lo aprendido con las actividades:

a) $$\frac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{1-\frac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}-}=$$

b) $$\frac{x}{1-\frac{1}{1+\frac{x}{y}}}=$$

Resolver los siguientes ejercicios

1.- Realiza las siguientes sumas o restas de fracciones en tu cuaderno:

a) $\frac{5m}{m+1}+\frac{2m}{m+1}-\frac{6m}{m+1}=$

b) $\frac{3}{2p+2}-\frac{1}{4p+4}-\frac{4}{8-8p}=$

c) $\frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}=$

d) $\frac{8}{(x^2+3)(x^2-1)}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{4}{x+1}=$

2.- Realizar las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) $\frac{3a^2b^3c}{4x^3y}\cdot\frac{12xy^3}{5a^2bc}=$

b) $\left(\frac{m^3-27}{n^3-1}\right)\cdot\left(\frac{n^2+n+1}{m^2+3m+9}\right)=$

c) $\frac{3x-3}{2x+2}\cdot\frac{x+1}{x-1}\div\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=$

3. VALORACIÓN

1. ¿Qué significado relevante tiene el conocer las fracciones algebraicas para tu vida?

R. ....

....

2. ¿En comparación a las fracciones numéricas que ventajas más tiene el saber fracciones algebraicas?

R. ....

....

4. PRODUCCIÓN

Realiza un material didáctico que te ayude a representar las fracciones algebraicas y clasificarlas según sus características.

BIBLIOGRAFÍA

- Baldor, A. (1997). Álgebra, Procesos de matemáticas. En P. d. Matemática. España: Editorial CODICE .
- Botschaft del Plurinationalen Staats . (2021). Obtenido de El Nuevo Modelo Económico, Social, Comunitario y Productivo: http://www.bolivia.de/es/bolivia/economia-y-comercio/
- Costantino, M., & Martinez, J. (1962). Matemáticas revalida elemental 4. EDIC S M BURGOS.
- De la Colina , J. M. (s.f.). Monografía, el Centro de Tesis, Documentos, Publicaciones y Recursos Educativos. Obtenido de Resumen de la economía : https://www.monografias.com/trabajos54/resumen-economia/resumen-economia3.shtml
- Editorial Don Bosco Salesianos. (2011). Matemática. La Paz: Don Bosco.
- Flores Fernandez , R. (2011). Dossier Sistemas de Información Contable . En L. A. Flores, Ingeniería en Sistemas . La Paz Bolivia .
- Fowler Newton , E. (2019). Contabilidad básica. Buenos Aires : 4ta Edición .
- Flores Cadena, F. (s.f.). Matemática 1 y 2. Grupo Editorial Construyamos.
- Gutierrez Figueroa, P. A. (2005). Matemática 1. La Paz Bolivia: La Hoguera.
- Gutierrez Figueroa, P. A. (2005). Matemática 2. La Paz - Bolivia: La Hoguera.
- Gutierrez Figueroa, P. A. (2005). Matemática 3. La Paz - Bolivia: La Hoguera.
- Ministerio de Educación . (2017). Matemáticas (Guía de trabajo) Aprendizajes Especializados. En C. F. R.. La Paz .
- Rodriguez, D. (2015). Contabilidad.com.do . Obtenido de Principios de Contabilidad Generalmente Aceptados (PCGA): https://contabilidad.com.do/principios-de-contabilidad-generalmente-aceptados-pcga
- Santillana Secundaria. (2004). Libro de matemáticas 3 Recursos didácticos. México .
- Santillana. (2013). Matemática 1 y 2. En Matemática cuaderno de actividades. La Paz: Santillana.
- Sevilla, A. A. (2015). Economipedia. Obtenido de Economía: https://economipedia.com/definiciones/economia.html
- Tolentino, R. (2010). Contabilidad Básica. Academia.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN
ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Whatsapp a nivel nacional:
591 - 71550970
591 - 71530671

Correo electrónico
informacion@minedu.gob.bo

@minedubol

@minedu_bol

minedubol

Ministerio de Educación - Oficial

MinEduBol

Av. Arce #2147
Tel. (591-2) 2681200
www.minedu.gob.bo
La Paz - Bolivia